Pascal Chauvin

Lycée François Truffaut – Challans

MATHÉMATIQUES

Enseignement de spécialité 1ère

17 septembre 2020

Table des matières

Chapitre 1

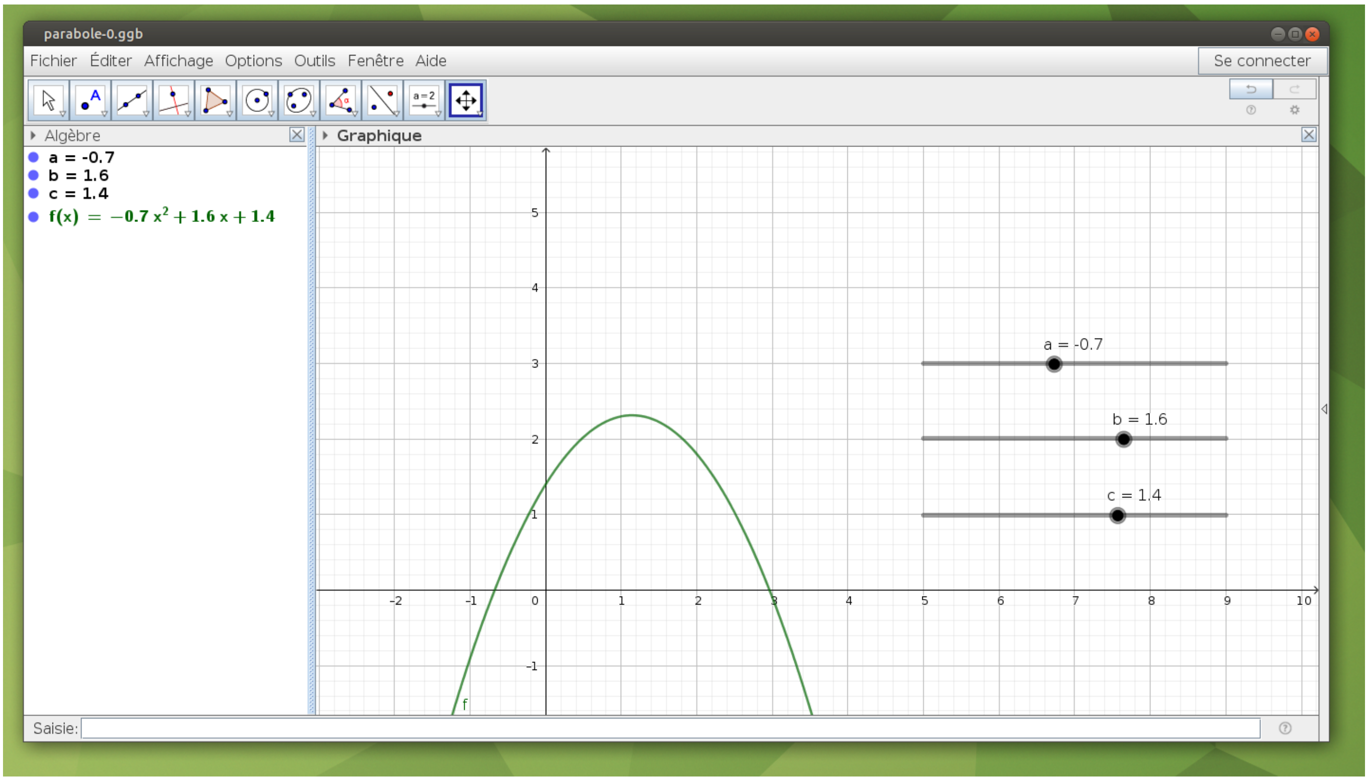
Second degré

Dans ce chapitre, on étudie les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme :

$$\boxed{f(x) = a\,x^2 + b\,x + c}$$

On suppose dans tout le chapitre que le nombre a est non nul (c.-à-d. $a \neq 0$).

La courbe qui représente f dans un repère du plan est appelée **parabole**.



1.1 Axe de symétrie et sommet

Une parabole possède un axe de symétrie et un sommet.

1.1.1 Axe de symétrie

Propriété 1

— La parabole possède un axe de symétrie (unique).
— L'axe de symétrie est parallèle à l'axe des ordonnées.
— Une équation de l'axe de symétrie est : $\boxed{x = \dfrac{-b}{2\,a}}$.

1.1.2 Sommet

Définition 1 – sommet

Le point d'intersection entre la parabole et son axe de symétrie est appelé **sommet de la parabole**.

Attention, la langue française est trompeuse : une parabole pourra être située au-dessus de son sommet ou en dessous de son sommet.

Propriété 2 – coordonnées du sommet

L'abscisse du sommet de la parabole est $\dfrac{-b}{2\,a}$; son ordonnée est $f\left(\dfrac{-b}{2\,a}\right)$.

Exemple 1

On donne : $g(x) = 3\,x^2 + x + 2$. La parabole qui représente g est nommée $\mathcal{P}$.

1. Identifier les coefficients a, b et c.
2. Déterminer l'équation réduite de l'axe de symétrie de $\mathcal{P}$.
3. Calculer les coordonnées du sommet de $\mathcal{P}$.
4. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la parabole avec l'axe des ordonnées.

1.2 Forme canonique

L'expression $a\,x^2 + b\,x + c$ peut toujours s'écrire dans une forme particulière.

Propriété 3

Il est possible d'écrire $f(x)$ sous la forme :

$$f(x) = a\,(x - p)^2 + q$$

Les nombres p et q sont uniques : $\boxed{p = \dfrac{-b}{2\,a}}$ et $\boxed{q = \dfrac{-b^2 + 4ac}{4\,a}}$.

On reconnaît que p est l'abscisse du sommet, donc q est l'ordonnée du sommet.

Définition 2 – forme canonique

L'expression « $a\,(x - p)^2 + q$ » est appelée **forme canonique**.

Attention : l'utilisation des mots « forme canonique » est réservée aux fonctions du second degré.

Exemple 2

On donne : $g(x) = 3\,x^2 + x + 2$.

Donner l'expression de la forme canonique de $g(x)$.

Exercice 1

1. Établir à l'aide de la propriété précédente une formule pour calculer les coordonnées du sommet.
2. En déduire un programme en langage Python qui calcule les coordonnées du sommet d'une parabole.

```
def f(x, a, b, c):
␣return (a*(x**2) + b*x + c)

def nombre_p(a, b, c):
␣return (-b/(2*a))

def nombre_q(a, b, c):
␣return f(nombre_p(a, b, c), a, b, c)

#
# exemple pour f(x) = 3*x^2 + x + 1
#
print(nombre_p(3, 1, 1)) # abscisse du sommet
print(nombre_q(3, 1, 1)) # ordonnée du sommet
```

Le script « sommet.py »

1.2.1 Variations d'une fonction du second degré

Propriété 4 – variations

f est une fonction du second degré, avec $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ et $a \neq 0$.

- Si $a > 0$, alors f est décroissante sur $\left]-\infty\,;\dfrac{-b}{2\,a}\right[$ et croissante sur $\left]\dfrac{-b}{2\,a}\,;+\infty\right[$;
- Si $a < 0$, alors f est croissante sur $\left]-\infty\,;\dfrac{-b}{2\,a}\right[$ et décroissante sur $\left]\dfrac{-b}{2\,a}\,;+\infty\right[$.

1.2.2 Positions relatives de la parabole et de son sommet

Propriété 5

Dans un repère du plan, la parabole qui représente $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ est située :

- au-dessus de son sommet si, et seulement si, $a > 0$.
  *Autrement dit, la fonction f atteint un **minimum global** en son sommet.*
- en dessous de son sommet si, et seulement si, $a < 0$.
  *Autrement dit, la fonction f atteint un **maximum global** en son sommet.*

1.2.3 Intersection(s) de la parabole et de l'axe des abscisses

1.2.4 Discriminant

Le discriminant est un nombre particulier calculé à partir de a, b et c.

Le signe du discriminant permet de connaître le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Définition 3 – discriminant

Le discriminant est le nombre noté Δ calculé par :

$$\Delta = b^2 - 4\,a\,c$$

On prononce « delta majuscule » la lettre Δ de l'alphabet grec (« ∂ » est la minuscule correspondante).

On reconnaît que Δ est l'opposé du numérateur dans l'expression du nombre q de la forme canonique :

$$q = \frac{-b^2 + 4\,a\,c}{4\,a} = \frac{-\Delta}{4\,a}$$

Exemple 3

Calculer le discriminant de $3\,x^2 + x + 2$.

1.2.5 Nombre de racines

La valeur du discriminant est utile pour le calcul des solutions de cette équation, quand elle(s) existe(nt).

Propriété 6

1. La parabole coupe l'axe des abscisses en deux points si, et seulement si, $\Delta > 0$.
   Autrement dit, l'équation $f(x) = 0$ possède deux solutions.
   Les solutions sont alors les deux nombres :
   $$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2\,a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2\,a}$$
2. La parabole est tangente avec l'axe des abscisses en un point unique si, et seulement si, $\Delta = 0$.
   Autrement dit, l'équation $f(x) = 0$ possède une solution unique.
   L'unique solution est alors le nombre :
   $$x_0 = \frac{-b}{2\,a}$$
3. La parabole ne coupe pas l'axe des abscisses si, et seulement si, $\Delta < 0$.
   Autrement dit, l'équation $f(x) = 0$ ne possède aucune solution réelle.

Exemple 4

Étudier les solutions de l'équation $3\,x^2 + x + 2 = 0$.

1.2.6 Factorisation

La connaissance des racines permet de factoriser (ou non) le polynôme du seocnd degré :

Propriété 7 – factorisation du polynôme

f est une fonction du second degré, avec $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ et $a \neq 0$.
Δ est son discriminant.

1. Si $\Delta > 0$, alors $f(x)$ peut être factorisé en :

$$f(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)\,.$$

2. Si $\Delta = 0$, alors $f(x)$ peut être factorisé en :

$$f(x) = a\,(x - x_0)^2\,.$$

3. Si $\Delta < 0$, alors $f(x)$ ne peut pas être factorisé.

Propriété 8 – signe du polynôme

f est une fonction du second degré, avec $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ et $a \neq 0$.
Δ est son discriminant.

1. Si $\Delta > 0$, alors :
   - Si $a > 0$, alors $f(x)$ est négatif entre les racines et positif à l'extérieur ;
   - Si $a < 0$, alors $f(x)$ est positif entre les racines et négatif à l'extérieur.
2. Si $\Delta = 0$, alors :
   - Si $a > 0$, alors $f(x)$ est positif partout, et nul en $\dfrac{-b}{2\,a}$;
   - Si $a < 0$, alors $f(x)$ est négatif partout, et nul en $\dfrac{-b}{2\,a}$.
3. Si $\Delta < 0$, alors :
   - Si $a > 0$, alors $f(x)$ est strictement positif sur $\mathbb{R}$;
   - Si $a < 0$, alors $f(x)$ est strictement négatif sur $\mathbb{R}$.

Remarque : dans les deux derniers cas, on peut dire aussi que f est du signe de a (sauf quand $a = 0$!)

Propriété 9 – produit et somme des racines

f est une fonction du second degré, avec $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ et $a \neq 0$.
Si le discriminant Δ est **strictement positif**, alors :

1. la somme des racines est égale à $\dfrac{-b}{a}$;
2. le produit des racines est égal à $\dfrac{c}{a}$.

Vocabulaire : une racine est une solution de l'équation $f(x) = 0$.