Pascal CHAUVIN

Lycée François TRUFFAUT – Challans

MATHÉMATIQUES

Enseignement de spécialité 1$^{\text{ère}}$

4 mai 2021

Table des matières

Chapitre 1

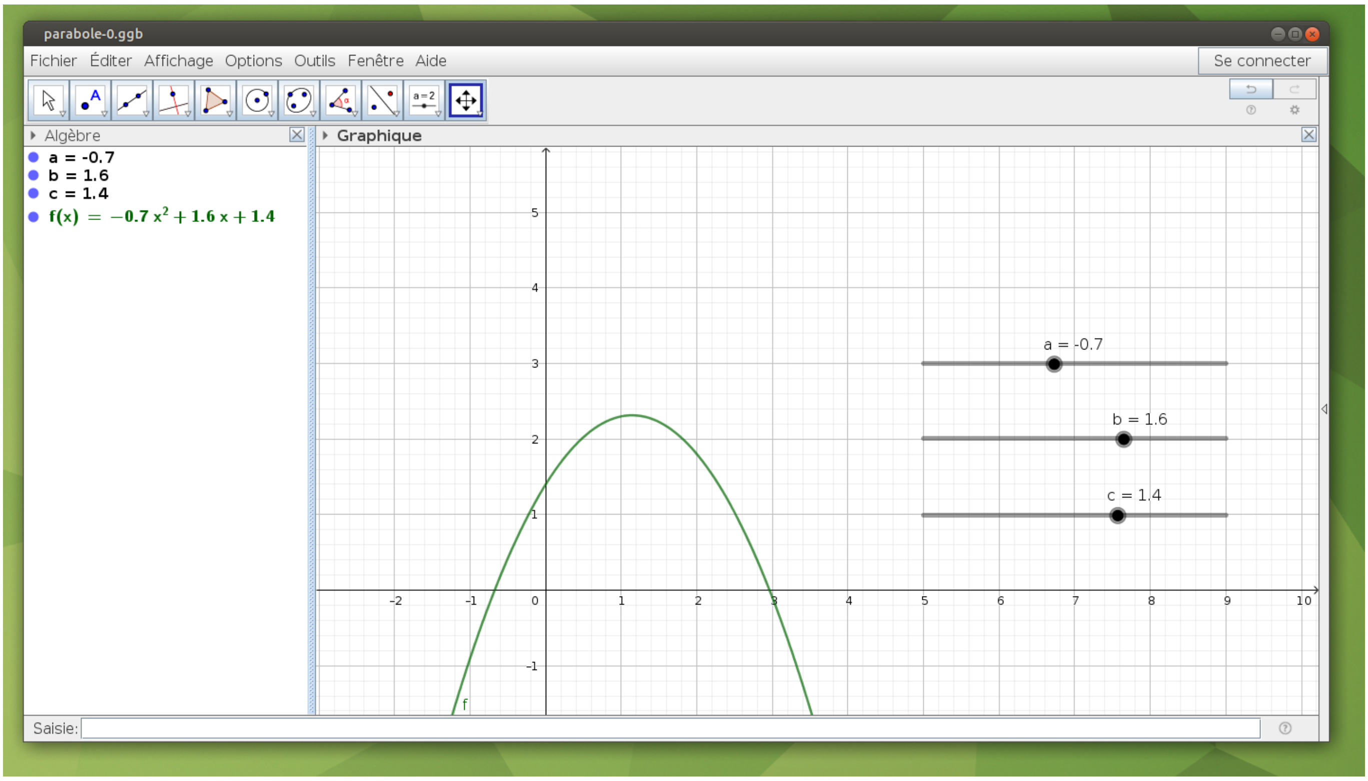
Second degré

Dans ce chapitre, on étudie les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme :

$$\boxed{f(x) = a\,x^2 + b\,x + c}$$

On suppose dans tout le chapitre que le nombre a est non nul (c.-à-d. $a \neq 0$).

La courbe qui représente f dans un repère du plan est appelée **parabole**.



1 Axe de symétrie et sommet

Une parabole possède un axe de symétrie et un sommet.

1.1 Axe de symétrie

Propriété 1

— La parabole possède un axe de symétrie (unique).
— L'axe de symétrie est parallèle à l'axe des ordonnées.
— Une équation de l'axe de symétrie est : $\boxed{x = \dfrac{-b}{2\,a}}$.

1.2 Sommet

Définition 1 – sommet

Le point d'intersection entre la parabole et son axe de symétrie est appelé **sommet de la parabole**.

Attention, la langue française est trompeuse : une parabole pourra être située au-dessus de son sommet ou en dessous de son sommet.

Propriété 2 – coordonnées du sommet

L'abscisse du sommet de la parabole est $\dfrac{-b}{2\,a}$; son ordonnée est $f\left(\dfrac{-b}{2\,a}\right)$.

Exemple 1

On donne : $g(x) = 3\,x^2 + x + 2$. La parabole qui représente g est nommée $\mathcal{P}$.

1. Identifier les coefficients a, b et c.
2. Déterminer l'équation réduite de l'axe de symétrie de $\mathcal{P}$.
3. Calculer les coordonnées du sommet de $\mathcal{P}$.
4. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la parabole avec l'axe des ordonnées.

2 Forme canonique

L'expression $a\,x^2 + b\,x + c$ peut toujours s'écrire dans une forme particulière.

Propriété 3

Il est possible d'écrire $f(x)$ sous la forme :

$$f(x) = a\,(x - p)^2 + q$$

Les nombres p et q sont uniques : $\boxed{p = \dfrac{-b}{2\,a}}$ et $\boxed{q = \dfrac{-b^2 + 4ac}{4\,a}}$.

On reconnaît que p est l'abscisse du sommet, donc q est l'ordonnée du sommet.

Définition 2 – forme canonique

L'expression « $a\,(x - p)^2 + q$ » est appelée **forme canonique**.

Attention : l'utilisation des mots « forme canonique » est réservée aux fonctions du second degré.

Exemple 2

On donne : $g(x) = 3\,x^2 + x + 2$.

Donner l'expression de la forme canonique de $g(x)$.

Exercice 1

1. Établir à l'aide de la propriété précédente une formule pour calculer les coordonnées du sommet.
2. En déduire un programme en langage Python qui calcule les coordonnées du sommet d'une parabole.

```
def f(x, a, b, c):
␣return (a*(x**2) + b*x + c)

def nombre_p(a, b, c):
␣return (-b/(2*a))

def nombre_q(a, b, c):
␣return f(nombre_p(a, b, c), a, b, c)

#
# exemple pour f(x) = 3*x^2 + x + 1
#
print(nombre_p(3, 1, 1)) # abscisse du sommet
print(nombre_q(3, 1, 1)) # ordonnée du sommet
```

Le script « sommet.py »

2.1 Variations d'une fonction du second degré

Propriété 4 – variations

f est une fonction du second degré, avec $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ et $a \neq 0$.

— Si $a > 0$, alors f est décroissante sur $\left]-\infty\,;\frac{-b}{2\,a}\right[$ et croissante sur $\left]\frac{-b}{2\,a}\,;+\infty\right[$;

— Si $a < 0$, alors f est croissante sur $\left]-\infty\,;\frac{-b}{2\,a}\right[$ et décroissante sur $\left]\frac{-b}{2\,a}\,;+\infty\right[$.

2.2 Positions relatives de la parabole et de son sommet

Propriété 5

Dans un repère du plan, la parabole qui représente $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ est située :

— au-dessus de son sommet si, et seulement si, $a > 0$.
Autrement dit, la fonction f atteint un ***minimum global*** *en son sommet.*

— en dessous de son sommet si, et seulement si, $a < 0$.
Autrement dit, la fonction f atteint un ***maximum global*** *en son sommet.*

2.3 Intersection(s) de la parabole et de l'axe des abscisses

2.4 Discriminant

Le discriminant est un nombre particulier calculé à partir de a, b et c.

Le signe du discriminant permet de connaître le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Définition 3 – discriminant

Le discriminant est le nombre noté Δ calculé par :

$$\Delta = b^2 - 4\,a\,c$$

On prononce « delta majuscule » la lettre Δ de l'alphabet grec (« ∂ » est la minuscule correspondante).

On reconnaît que Δ est l'opposé du numérateur dans l'expression du nombre q de la forme canonique :

$$q = \frac{-b^2 + 4\,a\,c}{4\,a} = \frac{-\Delta}{4\,a}$$

Exemple 3

Calculer le discriminant de $3\,x^2 + x + 2$.

2.5 Nombre de racines

La valeur du discriminant est utile pour le calcul des solutions de cette équation, quand elle(s) existe(nt).

Propriété 6

1. La parabole coupe l'axe des abscisses en deux points si, et seulement si, $\Delta > 0$.
   Autrement dit, l'équation $f(x) = 0$ possède deux solutions.
   Les solutions sont alors les deux nombres :
   $$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2\,a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2\,a}$$
2. La parabole est tangente avec l'axe des abscisses en un point unique si, et seulement si, $\Delta = 0$.
   Autrement dit, l'équation $f(x) = 0$ possède une solution unique.
   L'unique solution est alors le nombre :
   $$x_0 = \frac{-b}{2\,a}$$
3. La parabole ne coupe pas l'axe des abscisses si, et seulement si, $\Delta < 0$.
   Autrement dit, l'équation $f(x) = 0$ ne possède aucune solution réelle.

Exemple 4

Étudier les solutions de l'équation $3\,x^2 + x + 2 = 0$.

2.6 Factorisation

La connaissance des racines permet de factoriser (ou non) le polynôme du seocnd degré :

Propriété 7 – factorisation du polynôme

f est une fonction du second degré, avec $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ et $a \neq 0$.
Δ est son discriminant.

1. Si $\Delta > 0$, alors $f(x)$ peut être factorisé en :
$$f(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)\,.$$
2. Si $\Delta = 0$, alors $f(x)$ peut être factorisé en :
$$f(x) = a\,(x - x_0)^2\,.$$
3. Si $\Delta < 0$, alors $f(x)$ ne peut pas être factorisé.

Propriété 8 – signe du polynôme

f est une fonction du second degré, avec $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ et $a \neq 0$.
Δ est son discriminant.

1. Si $\Delta > 0$, alors :
   - Si $a > 0$, alors $f(x)$ est négatif entre les racines et positif à l'extérieur ;
   - Si $a < 0$, alors $f(x)$ est positif entre les racines et négatif à l'extérieur.
2. Si $\Delta = 0$, alors :
   - Si $a > 0$, alors $f(x)$ est positif partout, et nul en $\dfrac{-b}{2\,a}$;
   - Si $a < 0$, alors $f(x)$ est négatif partout, et nul en $\dfrac{-b}{2\,a}$.
3. Si $\Delta < 0$, alors :
   - Si $a > 0$, alors $f(x)$ est strictement positif sur $\mathbb{R}$;
   - Si $a < 0$, alors $f(x)$ est strictement négatif sur $\mathbb{R}$.

Remarque : dans les deux derniers cas, on peut dire aussi que f est du signe de a (sauf quand $a = 0$!)

Propriété 9 – produit et somme des racines

f est une fonction du second degré, avec $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ et $a \neq 0$.
Si le discriminant Δ est **strictement positif**, alors :

1. la somme des racines est égale à $\dfrac{-b}{a}$;
2. le produit des racines est égal à $\dfrac{c}{a}$.

Vocabulaire : une racine est une solution de l'équation $f(x) = 0$.

Chapitre 2

Listes

Dans le langage de programmation Python, les listes sont des structures de données qui permettent de manipuler des collections d'objets, par exemple des nombres, des chaînes de caractères...

Les opérations courantes sur les listes sont :

— définir une liste, avec élément(s) ou une liste vide (sans élément)
— lire la valeur de l'élément selon sa position
— fixer la valeur de l'élément selon sa position
— ajouter un élément en fin de liste
— longueur de la liste
— supprimer un élément
— définir une liste en extension ou en compréhension
— itérer les éléments d'une liste
— trier les éléments d'une liste
— compter les éléments d'une liste égaux à une certaine valeur

1 Définir une liste

Définir une liste (à partir de ses éléments).

Une valeur peut apparaître plusieurs fois.

Les éléments peuvent être de natures différentes.

Chaque élément possède un numéro indiquant sa position dans la liste (rang dans la liste, toujours à partir de 0 pour le premier).

Une liste possède une longueur.

```
>>> a = [4, 5, 4]
>>> a
[4, 5, 4]
>>> type(a)
<class 'list'>
>>> len(a)
3
>>>
```

Dans la console Python

Liste vide :

```
>>> b = []
>>> b
[]
>>> type(b)
<class 'list'>
>>> len(b)
0
```

Dans la console Python

Chaque élément possède un numéro dans la liste : son *rang* (position) dans la liste. Le premier élément est toujours au rang 0.

2 Lire ou fixer la valeur d'un élément

Lire la valeur de l'élément selon sa position.

Fixer la valeur de l'élément selon sa position.

```
>>> a = [-6, 0.5, 4]
>>> a
[-6, 0.5, 4]
>>> a[0]
-6
>>> a[0] = 10
>>> a
[10, 0.5, 4]
>>> del a[2]
>>> a
[10, 0.5]
>>> a.append(-7)
>>> a
[10, 0.5, -7]
>>>
```

Dans la console Python

Ajouter un nouvel élément à une certaine position n dans la liste : l'actuel élément à la position est décalé vers la droite pour laisser au nouvel élément en position n.

La première instruction « `insert` » ci-dessous insère un nouvel élément de valeur 10 en position 1 dans la liste a :

```
>>> a = [-6, 0.5, 4]
>>> a
[-6, 0.5, 4]
>>> a.insert(1, 10)
>>> a
[-6, 10, 0.5, 4]
>>> a.insert(0, 7)
>>> a
[7, -6, 10, 0.5, 4]
>>> a.insert(len(a), 1000)
>>> a
[7, -6, 10, 0.5, 4, 1000]
>>>
```

Dans la console Python

3 Parcourir une liste

Itérer sur les éléments d'une liste.

```
>>> a = [-6, 0.5, 4]
>>> for x in a:
...     print(x)
...
-6
0.5
4
>>>
```

Dans la console Python

Ce qu'on peut obtenir aussi avec :

```
>>> a = [-6, 0.5, 4]
>>> for i in range(len(a)):
...     print(a[i])
...
-6
0.5
4
>>>
```

Dans la console Python

4 Générer une liste en compréhension

Liste en compréhension :

```
>>> a = [x**2 for x in [1, 2, 3, 4]]
>>> a
[1, 4, 9, 16]
>>> b = [x**2 for x in range(1, 5) if x**2 < 10 and x**2 > 5]
>>> b
[9]
>>>
```

Dans la console Python

Dans le second exemple, la présence du test avec l'instruction « `if` » permet de filtrer les valeurs de x^2 et ne conserver que celles comprises dans l'intervalle $]5;10[\cap\mathbb{N}$.

On peut bien évidemment utiliser les listes dans les scripts (programmes Python) comme dans la console interactive de Python.

Exercice 1

Quel est l'effet produit par l'exécution du programme « `mystere.py` » suivant ?

```python
def truc(a):
  b = []
  for x in a:
    b.insert(0, x)
  return b

import random

a = [random.randint(0, 15) for n in range(8)]
print(a)

b = truc(a)
print(b)
```

Le script « mystere.py »

5 Tri et comptage

Trier les éléments d'une liste.

Compter les éléments d'une liste égaux à une valeur x.

```
>>> import random
>>> a = [random.randint(1, 5) for k in range(6)]
>>> a
[4, 3, 3, 2, 4, 5]
>>> a.sort()
>>> a
[2, 3, 3, 4, 4, 5]
>>> a.count(10)
0
>>> a.count(4)
2
>>>
```

Dans la console Python

```
>>> a = ["Joe", "William", "Averell", "Luke", "Jack"]
>>> a.sort()
>>> a
['Averell', 'Jack', 'Joe', 'Luke', 'William']
>>> a.count("Garfield")
0
>>> a.count("Joe")
1
>>>
```

console Python

Chapitre 3

Probabilités (1/3)

1 Probabilités conditionnelles

Définition 1 – Probabilité conditionnelle

Soient A et B deux événements d'un univers Ω d'une expérience aléatoire.

On appelle probabilité de B sachant A, notée $P_A(B)$, le nombre défini par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Remarque 1

Attention !!! Les notations P et P_A désignent deux probabilités **distinctes**, car elles n'ont pas le même univers.

Propriété 1

Soient A et B deux événements d'un univers Ω, avec $P(A) \neq 0$.

1. La probabilité d'un événement est un nombre compris entre 0 et 1 (inclus) :

$$0 \leqslant P_A(B) \leqslant 1$$

2. La somme des probabilités d'un événement et de son événement contraire est 1 :

$$P_A(B) + P_A\left(\overline{B}\right) = 1$$

Propriété 2

Soient A et B deux événements d'un univers Ω, avec $P(A) \neq 0$.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

Remarque 2

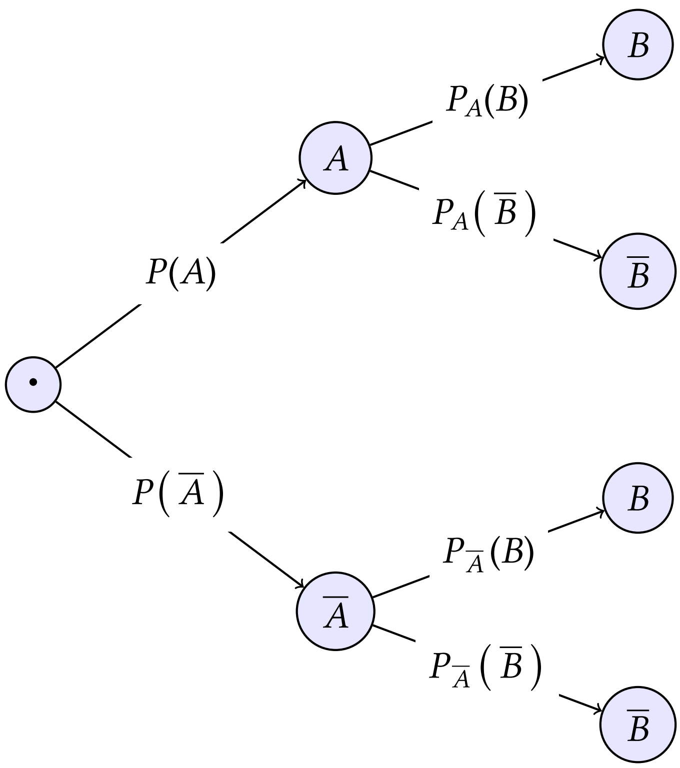
On peut aussi définir la probabilité de A sachant B, sous réserve que $P(B)$ soit non nulle. On en déduit alors :

$$P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$$

1.1 Probabilité conditionnelle et arbre pondéré

Il est pratique pour le calcul des probabilités de représenter deux événements A et B d'une expérience aléatoire à l'aide d'un arbre pondéré par les probabilités : la branche entre deux événements porte la probabilité de réaliser un événement à partir de l'événement précédent.

Pour l'arbre ci-dessous, on suppose que les probabilités $P(A)$ et $P\left(\overline{A}\right)$ sont non nulles :



Règles de calcul des probabilités à partir de l'arbre pondéré :

- la somme des probabilités de toutes les branches issues du même nœud est 1 ;
- la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités des branches qui composent ce chemin ;
- la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui conduisent à cet événement.

2 Probabilités totales

Propriété 3 – formule des probabilités totales

On considère n événements A_1, A_2, ..., A_n, tous de probabilité non nulle, incompatibles deux à deux, et dont l'union est Ω.

Pour n'importe quel événement $B \subset \Omega$, on a :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B)$$

L'égalité ci-dessus peut donc s'écrire aussi :

$$\boxed{P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \cdots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)}$$

Définition 2 – Partition de l'univers

$n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$.

Soient A_1, A_2, ..., A_n une famille de n événements de probabilités non nulles d'un univers Ω d'une expérience aléatoire.

On dit que A_1, A_2, ..., A_n réalisent une partition de Ω lorsque :

1. ils sont disjoints deux à deux : si $i \neq j$, alors $A_i \cap A_j = \varnothing$;
2. leur réunion est Ω : $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$.

Remarque 3

On peut étendre la formule des probabilités totales au cas de deux partitions A_1, A_2, ..., A_n et B_1, B_2, ..., B_m de l'univers.

3 Événements indépendants

Définition 3 – Événements indépendants

On considère A et B deux événements d'une même expérience aléatoire, chacun de probabilité non nulle.

A et B sont dits indépendants lorsque : $P(A) = P_B(A)$.

On devrait dire « A est indépendant de B », mais cela revient au même !

Propriété 4

A et B sont indépendants si, et seulement si, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Propriété 5

Si A et B sont deux événements indépendants alors :

- A et $\overline{B}$ sont indépendants ;
- $\overline{A}$ et B sont indépendants (et dans ce cas, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants aussi).

Chapitre 4

Dérivation (1/2)

1 Taux de variation

f est une fonction définie sur un intervalle I.

a et b sont deux nombres distincts dans I.

Définition 1 – Taux de variation

Le nombre $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est appelé taux de variation de la fonction f entre a et b.

Remarques

1. Si on note A et B les points de la représentation graphique de f, d'abscisses respectives $x_A = a$ et $x_B = b$, alors le taux de variation de la fonction f entre a et b est égal au coefficient directeur de la droite (AB).
2. Si on choisit d'écrire : $h = b - a$, on obtient une nouvelle écriture du taux de variation :
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

2 Nombre dérivé en un point

f est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

a est un nombre de I, h est un nombre réel non nul.

Définition 2 – Nombre dérivé

Si la valeur de l'expression $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers un nombre L lorsque le nombre h tend vers 0, on dit que la fonction f est dérivable en a.

Dans ce cas, le nombre L est appelé nombre dérivé de la fonction f en a. On écrit :

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = L$$

Définition 3 – Nombre dérivé : notation

Le nombre dérivé de la fonction f en a, quand il existe, est noté $f'(a)$:

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$$

3 Nombre dérivé et tangente

Soit f une fonction dérivable en un nombre réel a de son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$.

On note $\left(\mathcal{C}_f\right)$ la représentation graphique de la fonction f.

Définition 4 – Tangente à une courbe

La droite passant par le point $A(\,a\,;\,f(a)\,)$ et de coefficient directeur $f'(a)$ est appelée tangente à la courbe $\left(\mathcal{C}_f\right)$ au point A.

Propriété 1 – Équation de la tangente

f est une fonction définie et dérivable en un réel a de son ensemble de définition.

La tangente à la courbe $\left(\mathcal{C}_f\right)$ au point d'abscisse a possède comme équation :

$$y = f'(a)\,(x - a) + f(a)$$

4 Fonction dérivée d'une fonction

Définition 5 – Fonction dérivée

f est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, dont on sait qu'elle est dérivable en n'importe quel réel a de I.

La fonction définie sur I, qui à tout réel a de I associe le nombre dérivé de f en a est une nouvelle fonction $a \longmapsto f'(a)$; cette nouvelle fonction est notée f' et elle est appelée **fonction dérivée de f**.

5 Fonctions dérivées des fonctions usuelles

Propriété 2

Dans le formulaire, on suppose : $k \in \mathbb{R}$; $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geqslant 1$.

fonction	définie sur	dérivable sur	fonction dérivée
$f(x) = k$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = a\,x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$
$f(x) = a\,x + b$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2\,x$
$f(x) = x^n$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = n\,x^{n-1}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0 ; +\infty[$	$]0 ; +\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

La formule pour la dérivée d'une puissance reste vraie pour $n < 0$ et $x \neq 0$.

6 Fonctions dérivées et opérations

6.1 Fonction dérivée de la somme de deux fonctions

Propriété 3

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Alors la fonction f définie sur I par : $f(x) = u(x) + v(x)$ est dérivable sur I, avec :

$$\forall x \in I,\ f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

Pour mémoriser la formule, on peut écrire plus simplement *sans les* x :

$$\text{Si} \quad f = u + v \quad \text{alors} \quad f' = u' + v'$$

Ou même, sans donner de nom à la *fonction somme* :

$$(u + v)' = u' + v'$$

On peut démontrer la propriété analogue pour la *fonction différence* de u par v :

$$(u - v)' = u' - v'$$

6.2 Fonction dérivée du produit par une constante

Propriété 4 – fonction dérivée de $k \times u$

La fonction u est définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, k est un nombre réel.

Alors la fonction $x \longmapsto k \times u(x)$ est définie et dérivable sur I, avec :

$$\forall x \in I,\ (k \times u)'(x) = k \times u'(x)$$

On écrit plus simplement :

$$(k\,u)' = k\,u'$$

Propriété 5 – dérivée du produit de deux fonctions

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Alors la fonction $x \longmapsto u(x) \times v(x)$ est définie et dérivable sur I, avec :

$$\forall x \in I,\ (u \times v)'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$$

On écrit plus simplement :

$$(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$$

6.3 Quotient et inverse

Propriété 6 – fonction dérivée d'un quotient

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

De plus, on sait que la fonction v ne s'annule pas sur I.

Alors la fonction $x \longmapsto \dfrac{u(x)}{v(x)}$ est définie et dérivable sur I, avec :

$$\forall x \in I, \left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{\left(v(x)\right)^2}$$

En écriture simplifiée :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

On en déduit la propriété pour la dérivée de la fonction *inverse* d'une fonction :

Propriété 7

Soit v une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

On suppose de plus que v ne s'annule pas sur I.

Alors la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{v(x)}$ est définie et dérivable sur I, avec :

$$\forall x \in I, \left(\frac{1}{v}\right)'(x) = \frac{-v'(x)}{\left(v(x)\right)^2}$$

En écriture simplifiée :

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$$

6.4 Fonction composée : dérivation

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Soient a et b deux nombres réels. On s'intéresse à une nouvelle fonction appelée **fonction composée** g :

$$g \ : \ x \longmapsto f(a\,x+b)$$

et à la fonction dérivée g'.

On appelle J l'intervalle de $\mathbb{R}$ tel que, pour tout nombre x de J, on a : $a\,x+b \in I$.

Propriété 8 – dérivée d'une fonction composée

La fonction $x \longmapsto f(a\,x+b)$ est définie et dérivable sur J, avec :

$$\left(f(a\,x+b)\right)' = a \times f'(a\,x+b)$$

Chapitre 5

Probabilités (2/3)

1 Variables aléatoires

Définition 1 – Variable aléatoire discrète

Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$ l'univers fini d'une expérience aléatoire.

On appelle variable aléatoire une fonction définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Une variable aléatoire est souvent notée X.

Si a est un réel, l'événement « X prend la valeur a » est noté : $\{X = a\}$.

Un tel événement est constitué de toutes les issues de Ω qui ont pour image a.

1.1 Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition 2 – Loi de probabilité

On considère une variable aléatoire X prenant les valeurs $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Lorsqu'on associe à chaque valeur x_i la probabilité de l'événement $\{X = x_i\}$, on dit qu'on définit la loi de probabilité de X.

En pratique, pour définir la loi de probabilité d'une expérience aléatoire,

1. on détermine toutes les valeurs possibles $x_1, x_2, \dots, x_n$ prises par X ;
2. on calcule les probabilités $p_1, p_2, \dots, p_n$ d'obtenir les valeurs correspondantes ;
3. on rassemble ces informations dans un tableau :

Valeur prise par X	x_1	x_2	...	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

On a donc la propriété :

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$$

c.-à-d. :

$$p(X = x_1) + p(X = x_2) + \ldots + p(X = x_n) = 1$$

1.2 Espérance d'une variable aléatoire

Définition 3 – Espérance mathématique

On appelle espérance mathématique de la variable aléatoire X le nombre noté $\mathrm{E}(X)$ défini par :

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} p\left(X = x_i\right) \times x_i$$

L'espérance mathématique correspond à la valeur moyenne que prendrait la variable aléatoire X pour un très grand nombre de réalisations de l'expérience aléatoire.

1.3 Variance et écart-type d'une variable aléatoire

Définition 4 – Variance

On appelle variance de la variable aléatoire X le nombre noté $\mathrm{V}(X)$ défini par :

$$\mathrm{V}(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \times \left(x_i - \mathrm{E}(X)\right)^2$$

Définition 5 – Écart-type

On appelle écart-type de la variable aléatoire X le nombre noté $\sigma(X)$ défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{V}(X)}$$

1.4 Propriétés

Propriété 1

X est une variable aléatoire.

a et b sont deux nombres réels.

1. Propriété de l'espérance mathématique :

$$\mathrm{E}(a\,X + b) = a\,\mathrm{E}(X) + b$$

2. Propriété de la variance :

$$\mathrm{V}(a\,X) = a^2\,\mathrm{V}(X)$$

Chapitre 6

Suites (1/3)

1 Définition et notations

Définition 1

Une suite numérique u est une fonction définie sur $\mathbb{N}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rccc} u : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \longmapsto & u(n) \end{array}$$

Remarque : une suite peut être définie **seulement à partir d'un certain nombre entier naturel** (et non à partir de l'indice 0 ou 1) :

Par exemple, la suite $v : n \longmapsto \sqrt{n-2}$ n'est définie que pour $n \geqslant 2$.

On utilise des notations spéciales pour les suites (on « numérote » les images) :

— pour l'image de l'entier n par u, on emploie la notation avec indice :

$$u_n = u(n)$$

— pour la suite u elle-même, on note :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n)_{n\geqslant 0}$$

ou encore :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n)$$

Pour l'exemple précédent, on note : $(u_n)_{n\geqslant 2}$.

Définition 2 – suite définie par récurrence

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et a est un nombre réel.

On peut définir une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par récurrence.

Chapitre 7

Suites (2/3)

1 Variations d'une suite

Définition 1 – suite croissante

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir du rang $n_0 \in \mathbb{N}$ lorsque :

Pour tout nombre entier naturel n, si $n \geqslant n_0$, alors $u_{n+1} \geqslant u_n$.

Propriété 1

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir de n_0 :

Pour tout nombre entier naturel n, si $n \geqslant n_0$, alors $u_n \geqslant u_{n_0}$.

Cette propriété est une conséquence de la définition précédente.

On dispose des propriétés analogues pour les suites *décroissantes*.

Définition 2 – suite décroissante

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir du rang $n_0 \in \mathbb{N}$ lorsque :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0,\ u_{n+1} \leqslant u_n$$

Propriété 2

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir de n_0 :

Pour tout nombre entier naturel n, si $n \geqslant n_0$, alors $u_n \leqslant u_{n_0}$.

Définition 3 – suite monotone

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante ou décroissante est une suite monotone.

Remarque :

Une suite peut tout à fait être ni croissante, ni décroissante.

Définition 4 – suite majorée, suite minorée, suite bornée

- On dit qu'une suite u est majorée par un réel M si, pour tout entier n, $u_n \leqslant M$.
- On dit qu'une suite u est minorée par un réel m si, pour tout entier n, $u_n \geqslant m$.
- On dit qu'une suite majorée et minorée est une suite bornée.

Chapitre 8

Dérivation (2/2)

1 Fonction dérivée et variations d'une fonction

On considère une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Propriété 1

1. f est croissante sur I si, et seulement si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$.
2. f est décroissante sur I si, et seulement si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$.
3. f est constante sur I si, et seulement si, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.

2 Extremum d'une fonction

On considère une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et $a \in I$.

Définition 1 – maximum

f possède un maximum en a sur I lorsque, pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant f(a)$.

Le maximum de f sur I est alors égal à $f(a)$ (le maximum est atteint pour $x = a$).

Remarques :

1. On dispose d'une définition analogue pour le minimum d'une fonction sur un intervalle.
2. Un extremum est un maximum ou un minimum.

Propriété 2

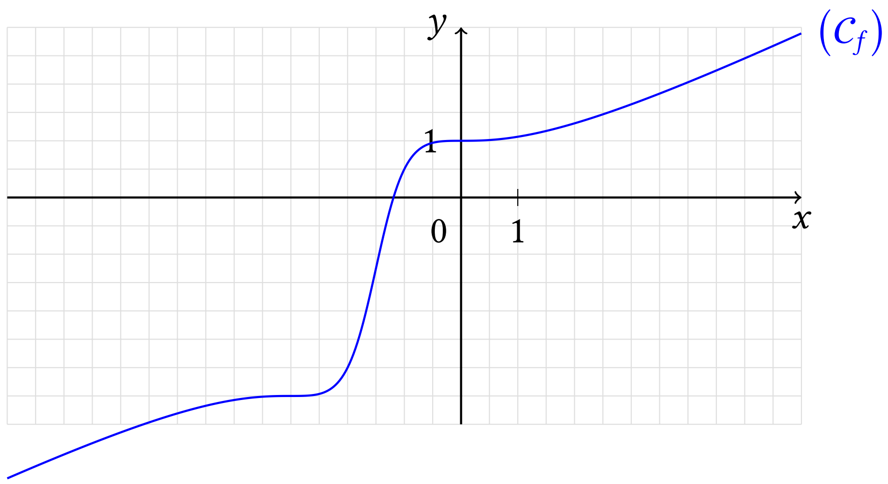
f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle ouvert I.

a est un réel de I, qui n'est pas l'une des bornes de I.

Si f possède un extremum en a alors $f'(a) = 0$.

Attention : l'énoncé réciproque est faux !

Par exemple :



$$f \; : \; x \longmapsto 2 + \frac{x^3}{1\;(x^2 + 3x + 3)}$$

Chapitre 9

Suites (3/3)

1 Suites arithmétiques

Définition 1

a et b sont deux nombres réels.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + b \end{cases}$$

est appelée suite arithmétique de premier terme a et de raison b.

Propriété 1 – terme général d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + n \times r\,.$$

ATTENTION

Il faut veiller au rang du premier terme d'une suite géométrique : en effet la formule précédente est FAUSSE si la suite n'est pas définie à partir du rang 0 mais 1 (par exemple) ! Dans ce cas (et seulement ce cas), la bonne formule devient :

Si $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite arithmétique de raison r, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_1 + (n-1) \times r\,.$$

Propriété 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique si, et seulement si, il existe un nombre réel λ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \lambda\,.$$

Dans ce cas, λ est la raison de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Propriété 3

Pour n'importe quel nombre entier naturel non nul n :

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n\,(n+1)}{2}.$$

La propriété précédente n'est rien d'autre que la somme des n premiers termes de la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 1.

2 Suites géométriques

Définition 2

a et b sont deux nombres réels.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = b \times u_n \end{cases}$$

est appelée suite géométrique de premier terme a et de raison b.

Propriété 4 – terme général d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 \times q^n\,.$$

Propriété 5

Pour n'importe quel nombre entier naturel non nul n et pour n'importe quel réel q différent de 1 :

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Les remarques précédentes concernant les suites arithmétiques (rang du premier terme non nul et formule clause, somme des premiers termes) restent valables pour les suites géométriques !

3 Suites arithmético-géométriques

Définition 3

a, b et k sont trois nombres réels.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = k \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = a \times u_n + b \end{cases}$$

est appelée suite arithmético-géométrique.

4 Variations d'une suite arithmétique

Propriété 6 – variations d'une suite arithmétique

1. Une suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison r est croissante si, et seulement si, r est un réel strictement positif.

2. Une suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison r est décroissante si, et seulement si, r est un réel strictement négatif.

5 Variations d'une suite géométrique positive

On rappelle que le terme général d'une suite géométrique u de premier terme u_0 et de raison q est, pour tout entier naturel n :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

On en déduit que le signe du terme général dépend des signes des nombres u_0, q et de la parité du nombre entier n :

signe de u_n		signe de u_0	
		positif	négatif
signe de q	positif	u_n est	u_n est
	négatif	n pair : u_n est	n pair : u_n est
		n impair : u_n est	n impair : u_n est

Propriété 7 – variations d'une suite géométrique positive

q désigne un nombre réel positif :
- la suite géométrique $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si $q > 1$;
- la suite géométrique $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante si $0 < q < 1$.

Remarques :

1. Pour $q = 1$, la suite est constante ;
2. Le signe du quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ (égal à la raison pour une suite géométrique) peut varier selon la parité de n (comme rappelé ci-dessus).
3. Pour une suite géométrique de raison q positive et de premier terme u_0 négatif, on a :
   - tous les termes sont négatifs ;
   - la suite géométrique $(u_0\, q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si $0 < q < 1$;
   - la suite géométrique $(u_0\, q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante si $q > 1$.

6 Limite d'une suite

Définition 4 – suite majorée, suite minorée, suite bornée

- On dit qu'une suite u est majorée par un réel M si, pour tout entier n, $u_n \leqslant M$.
- On dit qu'une suite u est minorée par un réel m si, pour tout entier n, $u_n \geqslant m$.
- On dit qu'une suite majorée et minorée est une suite bornée.

Définition 5 – suite de limite 0

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite.

Quand, pour n'importe quel nombre réel positif a, aussi petit que l'on veut, on peut déterminer un certain nombre entier naturel n_0 pour lequel on a :

$$\text{si } n \geqslant n_0\,,\ \text{alors } |u_n| \leqslant a$$

On dit alors que la suite u tend vers 0 et on écrit :

$$\lim_{n \longmapsto +\infty} u_n = 0$$

Définition 6 – suite de limite $+\infty$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite.

Quand, pour n'importe quel nombre réel positif A, on peut déterminer un certain nombre entier naturel n_0 pour lequel on a :

$$\text{si } n \geqslant n_0\,,\ \text{alors } \ u_n \geqslant A$$

On dit alors que la suite u tend vers l'infini (l'infini positif est noté $+\infty$) et on écrit :

$$\lim_{n \longmapsto +\infty} u_n = +\infty$$

Chapitre 10

Probabilités (3/3)

Ce chapitre est présenté ici pour information et ne fait pas partie du programme de Première spécialité mathématique : il fait désormais partie des enseignements de Terminale, selon l'option choisie.

1 Loi binomiale

2 Expérience de Bernouilli

On s'intéresse à une expérience aléatoire, ayant seulement deux issues :

— une issue est nommée « succès » et notée S;
— l'autre issue est nommée « échec » et notée $\overline{S}$.

Définition 1 – Épreuve de Bernouilli

Une expérience aléatoire, ayant seulement deux issues, est appelée épreuve de Bernouilli.

On note p la probabilité de succès : $p \in [0; 1]$.

On dit que la variable aléatoire qui prend la valeur 1 (et prend la valeur 0 sinon) suit la loi de Bernouilli de paramètre p.

k	1	0
$P(X = k)$	p	$1 - p$

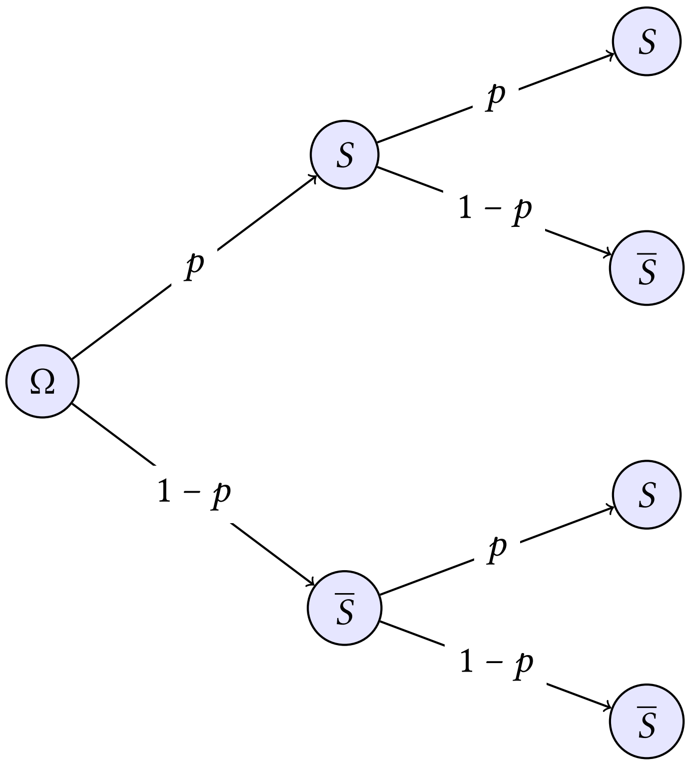
Propriété 1

Pour une épreuve de Bernouilli de paramètre p, on a :

$$\mathrm{E}(X) = p\,; \quad \mathrm{V}(X) = p\,(1-p)\;; \quad \sigma(X) = \sqrt{p\,(1-p)}$$

3 Répétition d'expériences de Bernouilli

Une expérience de Bernouilli est souvent **répétée plusieurs fois dans des conditions identiques**. On peut représenter cette expérience par un *arbre* :



On dit aussi que « l'expérience aléatoire suit un schéma de Bernouilli ».

Définition 2 – Loi binomiale de paramètres n et p

On répète n fois une épreuve de Bernouilli de paramètre p.

On dit que la variable aléatoire X égale au nombre de succès lors des n expériences suit la loi binomiale de paramètres n et p.

On note :

$$X \sim \mathcal{B}(\,n\,;\,p\,)$$

Propriété 2

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$.

Pour tout $k \in \{0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ n\}$, on a :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \, (1-p)^{n-k}$$

La propriété ci-dessus utilise la notation « k parmi n » (cf. chapitre suivant) :

Définition 3 – Notation k parmi n

Pour tout entier $k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$, on note $\dbinom{n}{k}$ le nombre égal au nombre de manières d'obtenir k succès au cours de n épreuves de Bernouilli.

Propriété 3

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(\,n\,;\,p\,)$.

$$\mathrm{E}(X) = n\,p\,; \quad \mathrm{V}(X) = n\,p\,(1-p)\,; \quad \sigma(X) = \sqrt{n\,p\,(1-p)}$$

Chapitre 11

Fonction exponentielle

1 Définition et premières propriétés

Propriété 1 et définition – fonction exponentielle

Il existe une seule fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et qui vérifie :

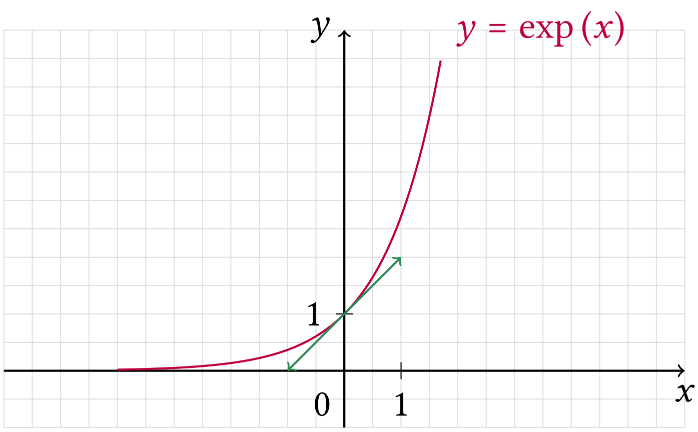
$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad f'(x) = f(x)$$

Cette fonction est appelée fonction exponentielle et on la note $\exp = f$.

$$\exp(0) = 1 \quad \text{et} \quad \exp' = \exp$$

Par conséquent, l'image de n'importe quel réel x est notée $\exp(x)$.

Représentation graphique



Propriété 2 – propriété fondamentale (relation fonctionnelle)

x et y sont deux réels quelconques :

$$\exp(x) \times \exp(y) = \exp(x+y)$$

Comme les propriétés des fonctions exponentielles s'écrivent comme celles des puissances, on fait la convention d'utiliser la même notation :

Définition 1 – nombre « e » et nouvelle notation

On note $e = \exp(1)$.

On en déduit :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = e^x$.

$$\exp(1) = e^1 = e$$

Remarque importante : La propriété fondamentale s'écrit donc, pour tous nombres réels x et y :

$$e^x \times e^y = e^{x+y}$$

Propriété 3

La fonction $x \longmapsto e^x$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

De plus, la fonction dérivée de la fonction $x \longmapsto e^x$ est la fonction $x \longmapsto e^x$ elle-même.

Propriété 4

La fonction $x \longmapsto e^x$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Propriété 5

La fonction $x \longmapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2 Autres propriétés de la fonction exponentielle

2.1 Fonction exponentielle et opérations

La fonction exponentielle est une fonction puissance particulière ; pour cette raison, les propriétés vraies pour les fonctions puissance sont encore vraies pour la fonction exponentielle.

Propriété 6

Les nombres x, x_1 et x_2 sont des réels quelconques :

$e^{-x} = \dfrac{1}{e^{x}}$	$e^{x_1} \times e^{x_2} = e^{(x_1+x_2)}$	$\dfrac{e^{x_1}}{e^{x_2}} = e^{(x_1-x_2)}$	$\left(e^{x_1}\right)^{x_2} = e^{(x_1 \times x_2)}$

2.2 Fonction « exponentielle d'une fonction affine »

Propriété 7

u désigne une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

La fonction $f : x \longmapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I, et pour tout nombre réel x de I, on a :

$$f'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$$

On déduit de la propriété précédente que les fonctions u et f ont le même sens de variation sur I.

On en déduit également le cas particulier pour une fonction affine u :

$$u(x) = a\,x + b$$

Propriété 8

La fonction $f : x \longmapsto e^{a\,x+b}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout nombre réel x, on a :

$$f'(x) = a \times e^{a\,x+b}$$

On peut alors déduire les variations de la fonction $f : x \longmapsto e^{a\,x+b}$:

Propriété 9 – variations

- La fonction $f : x \longmapsto e^{ax+b}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, si et seulement $a > 0$.
- La fonction $f : x \longmapsto e^{ax+b}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, si et seulement $a < 0$.

2.3 Équations et inéquations

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On en déduit :

Propriété 10

a et b sont deux réels quelconques.

L'inéquation $e^a < e^b$ équivaut à $a < b$.

Propriété 11

a et b sont deux réels quelconques.

L'équation $e^a = e^b$ équivaut à $a = b$.

2.4 Fonction exponentielle et suite géométrique

Propriété 12

$a \in \mathbb{R}$.
La suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par :

$$\text{pour tout n entier naturel, } u_n = e^{an}$$

est la suite géométrique de premier terme 1 et raison e^a.