

Mathématiques

Pascal CHAUVIN

1^{ère} S

12 février 2018



Paternité

Pas d'utilisation commerciale

Partage des conditions initiales à l'identique

[Licence Creative Commons 2.0 France](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.0/fr/)

TABLE DES MATIÈRES

1	Second degré	5
1.1	Polynôme du second degré	5
1.1.1	Expression du second degré	5
1.1.2	Forme canonique	5
1.1.3	Équation du second degré	6
1.2	Fonction du second degré	6
1.2.1	Fonction polynôme du second degré	6
1.2.2	Variations et extremum	7
1.2.3	Signe du trinôme	7
1.3	Exercices	9
2	Géométrie plane	13
2.1	Condition de colinéarité	13
2.1.1	Colinéarité et droites parallèles	13
2.1.2	Colinéarité et alignement	14
2.2	Vecteurs directeurs d'une droite	14
2.3	Équation cartésienne d'une droite	14
2.4	Repères du plan	15
3	Dérivation (1/2)	17
3.1	Taux de variation	17
3.2	Nombre dérivé en un point	18
3.3	Nombre dérivé et tangente	18
4	Fonctions usuelles	21
4.1	La fonction « carré »	21
4.2	La fonction « racine carrée »	21
4.2.1	Expression conjuguée	21
4.2.2	La fonction « racine carrée »	21
4.3	La fonction « valeur absolue »	22
4.3.1	Définition	22
4.3.2	Propriétés	22
4.4	La fonction « inverse »	24
4.5	Variations des fonctions composées	25
4.6	Exercices	26
5	Dérivation (2/2)	29
5.1	Fonction dérivée	29
5.2	Fonctions dérivées des fonctions usuelles	29
5.3	Fonctions dérivées et opérations	30
5.3.1	Fonction dérivée de la somme de deux fonctions	30
5.3.2	Fonction dérivée du produit par une constante	30
5.3.3	Quotient et inverse	31
5.4	Dérivation et variations	32

6	Statistiques	33
6.1	Rappels	33
6.1.1	Caractère : valeur et effectif	33
6.1.2	Effectif, effectif total	33
6.1.3	Fréquence	33
6.1.4	Effectif cumulé croissant	34
6.1.5	Fréquence cumulée croissante	34
6.1.6	Moyenne	35
6.1.7	La notation Σ	35
6.1.8	Médianes et quartiles	36
6.2	Diagramme en boîte	37
6.3	Variance et écart-type	38
6.4	Indicateurs d'une série statistique	39

1.1 Polynôme du second degré

a, b et c sont trois nombres réels; a est non nul.
 x est un nombre réel.

On distingue :

- l'**expression** $a x^2 + b x + c$, qui désigne le nombre de valeur « $a \times x^2 + b \times x + c$ ».
- la **fonction** $x \mapsto a x^2 + b x + c$.

1.1.1 Expression du second degré

Définition 1 – Polynôme du second degré



a, b et c sont trois nombres réels; a est non nul.

L'expression $a x^2 + b x + c$ est appelée « **polynôme du second degré** » (en x).

On rencontre aussi le nom « **trinôme** du second degré ».

Exemple 1 $\triangleright x^2 - \frac{4}{3}$ est un polynôme du second degré.

Exemple 2 $\triangleright (3x - 7)(2 + 3x) + 2x^2$ est un polynôme du second degré.

1.1.2 Forme canonique

a, b et c sont trois nombres réels; a est non nul.

Pour n'importe quel nombre x , on peut démontrer l'égalité :

$$a x^2 + b x + c = a \left(x - \frac{-b}{2a} \right)^2 + \left(\frac{-b^2 + 4ac}{4a} \right).$$

On pose alors : $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$.

(α et β sont prononcées « alpha » et « bêta », ce sont les lettres a et b de l'alphabet grec.)

On obtient alors :

$$a x^2 + b x + c = a (x - \alpha)^2 + \beta.$$

Définition 2 – Forme canonique



a, b et c sont trois nombres réels; a est non nul.

L'expression $a (x - \alpha)^2 + \beta$ est appelée **forme canonique** de $a x^2 + b x + c$.

Exemple 1 ▷ L'expression $\frac{3}{2}(x-2)^2 - 4$ est la forme canonique du polynôme...

Exemple 2 ▷ Quelle est la forme canonique du trinôme $x^2 + 10x - 39$?

La connaissance de la forme canonique d'un trinôme du second degré apporte de nombreuses informations à son sujet : il est donc extrêmement important de savoir l'établir.

1.1.3 Équation $ax^2 + bx + c = 0$

On s'intéresse à l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$. Cette équation peut comporter aucune, une ou deux solutions, selon les valeurs des nombres a , b et c .

Définition 3 – Discriminant



a , b et c sont trois nombres réels ; $a \neq 0$.

L'expression $b^2 - 4ac$ est appelée *discriminant* de l'expression $ax^2 + bx + c$.

Le discriminant est souvent noté Δ (prononcé « delta majuscule », c'est la lettre D de l'alphabet grec) :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Propriété 1



a , b et c sont trois nombres réels ; a est non nul.

On note Δ le discriminant de $ax^2 + bx + c$:

1. Si $\Delta = 0$, alors $ax^2 + bx + c = 0$ possède une solution réelle de valeur $\frac{-b}{2a}$;
2. Si $\Delta > 0$, alors $ax^2 + bx + c = 0$ possède deux solutions réelles ;
ce sont les nombres $\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
3. Si $\Delta < 0$, alors $ax^2 + bx + c = 0$ ne possède pas de solution réelle.

Dans le premier et le second cas, on obtient une forme factorisée du trinôme, à partir de la forme canonique.

Exemple 1 ▷ Indiquer le nombre de solutions de $x^2 + 10x - 39 = 0$, et leurs valeurs le cas échéant.

Exemple 2 ▷ Résoudre l'équation $9x^2 + 6x + 1 = 0$.

Exemple 3 ▷ Donner une forme factorisée de l'expression $2x^2 - 5x - 12$.

1.2 Fonction du second degré

L'étude d'une fonction du second degré s'appuie sur les définitions et propriétés précédentes.

1.2.1 Fonction polynôme du second degré

Définition 4 – Fonction polynôme du second degré

a, b et c sont trois nombres réels; a est non nul.

La fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, définie sur \mathbb{R} , est appelée « *fonction polynôme du second degré* ».

Avec les notations précédentes, on démontre : $f(\alpha) = \beta$.

1.2.2 Variations et extremum

a, b et c sont trois nombres réels; a est non nul.

Les nombres α et β sont définis comme précédemment.

Propriété 2

a, b et c sont trois nombres réels; a est non nul.

On note f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

1. Si $a > 0$, alors :

- f est décroissante sur $]-\infty; \alpha]$;
- f est croissante sur $[\alpha; +\infty[$;
- f possède un *minimum global* sur \mathbb{R} , atteint en $x = \alpha$ et de valeur β :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq \beta$$

(cette écriture signifie : « pour n'importe quel nombre réel x , $f(x) \geq \beta$ »)

2. Si $a < 0$, alors :

- f est croissante sur $]-\infty; \alpha]$;
- f est décroissante sur $[\alpha; +\infty[$;
- f possède un *maximum global* sur \mathbb{R} , atteint en $x = \alpha$ et de valeur β :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq \beta$$

1.2.3 Signe du trinôme $ax^2 + bx + c$

a, b et c sont trois nombres réels; $a \neq 0$.

On s'intéresse au signe de $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Propriété 3

	si $\Delta < 0$	si $\Delta > 0$
si $a > 0$	$f(x)$ est toujours strictement positif.	$f(x)$ est négatif entre les racines, et positif sinon.
si $a < 0$	$f(x)$ est toujours strictement négatif.	$f(x)$ est positif entre les racines, et négatif sinon.

Cette propriété provient de l'égalité :

$$\begin{aligned}ax^2 + bx + c &= a(x - \alpha)^2 + \beta \\ &= a \left[(x - \alpha)^2 + \frac{\beta}{a} \right] \\ &= a \left[(x - \alpha)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2} \right]\end{aligned}$$

1.3 Exercices

Exercice 1

À l'aide des formules de distributivité et des identités remarquables, développer et réduire :

1. L'expression $A = \left(-2x + \frac{1}{3}\right) \left(3x - \frac{5}{3}\right)$.
2. L'expression $B = (5x + \sqrt{3})^2$.
3. L'expression $C = \left(3x - \frac{5}{6}\right)^2$.
4. L'expression $D = \left(4x + \frac{\sqrt{2}}{3}\right) \left(4x - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$.

Exercice 2

1. (a) À l'aide d'une identité remarquable, écrire la forme canonique de $x^2 - 4x$.
(b) En déduire la forme canonique de $x^2 - 4x + 5$.
2. Mettre sous forme canonique $A = x^2 + 10x - 1$ et $B = 2x^2 + 8x + 3$.

Exercice 3

Mettre sous forme canonique les polynômes du second degré suivants :

1. Le polynôme $x^2 + 4x + 1$.
2. Le polynôme $-2x^2 + 3x - 6$.

Exercice 4

Donner le nombre de solutions de l'équation : $\sqrt{2}x^2 - x = -\frac{1}{2}$.

Exercice 5

a , b et c désignent trois nombres réels.

1. Écrire un algorithme qui calcule le nombre α et le nombre β pour la forme canonique du trinôme $ax^2 + bx + c$.
2. Écrire le programme correspondant pour la calculatrice.

Exercice 6

a , b et c désignent trois nombres réels.

1. Écrire un algorithme qui indique le nombre de solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.
2. Écrire le programme correspondant pour la calculatrice.

Exercice 7

Résoudre l'équation : $2x^2 - 3x + 1 = 0$.

Exercice 8

Une ville avec une fortification carrée (côté de longueur inconnue) comprend une porte au milieu de chaque côté.

Énoncé

À l'extérieur de la ville, vingt pas après la porte Nord se trouve un arbre. Si tu quittes la ville par la porte Sud, marche quatorze pas vers le Sud puis mille sept cent soixante-quinze pas vers l'Ouest, et tu commenceras tout juste à apercevoir l'arbre.

Tiré du « Jiuzhang suanshu » ou « Neuf chapitres sur l'art du calcul », ouvrage chinois daté de 200 ans avant J.C. composé de 246 problèmes ayant pour but de fournir des méthodes pour résoudre les problèmes quotidiens de l'ingénierie, de l'arpentage, du commerce et de la fiscalité.

Exercice 9

Énoncé

« Un carré et dix racines sont égaux à trente-neuf en nombre. »

Ce problème s'exprime de façon moderne de la manière suivante :

$$x^2 + 10x = 39$$

Pour les géomètres arabes du VII^e au XV^e siècle de notre ère, les problèmes du second degré reçoivent une résolution algébrique justifiée géométriquement.

On donne ci-dessous une adaptation moderne de la solution proposée :

Construire un carré d'aire x^2 .

Sur deux côtés du carré, construire un rectangle dont le deuxième côté mesure 5 unités.

Compléter la figure pour obtenir un carré.

Exercice 10

La cinquième partie de la troupe, moins trois, élevée au carré, était allée dans une caverne et un singe était en vue, grimpé sur une branche. Dis combien ils étaient.

Les singes de Bhāskara (XII^e siècle)

Source : Mathématiques au fil des âges, éd. Gauthier-Villars

Exercice 11

(énoncé modifié)

On considère l'expression $E = 3x^2 - 42x + 148$, et on veut démontrer :

Pour n'importe quelle valeur de x , $E \geq 1$.

1. On note $F = E - 1$. Développer et réduire F .
2. Établir la forme canonique de F .
3. Étudier le signe de F , puis conclure.

Exercice 12

On considère la fonction $f : x \mapsto -4x^2 - 16x - 13$.

1. Établir la forme canonique de $f(x)$.
2. Prouver que : $f(x) \leq 4$, pour n'importe quelle valeur du nombre réel x .
(ce qu'on écrira symboliquement : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq 4$)
3. Prouver que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq 7$.
4. Est-il exact que $f(x) \leq 2$, pour n'importe quelle valeur de x ?
5. Quel est le plus petit nombre M tel que, pour n'importe quel nombre x , on a $f(x) \leq M$?

Exercice 13

On considère la fonction $f : x \mapsto 3(x - 1)^2 + 2$.

1. La fonction f est représentée par une parabole : préciser les coordonnées de son sommet.
2. Étudier les variations de la fonction f (on dressera le tableau de variations de f).
3. Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 4$.

Exercice 14

On considère la fonction du second degré g définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x + \frac{39}{2}$.

1. Montrer que la forme canonique de g est :

$$g(x) = \frac{1}{2}(x - 5)^2 + 7.$$

2. En déduire le minimum de g sur \mathbb{R} .

2.1 Condition de colinéarité

On rappelle la définition suivante :

Définition 1 – vecteurs colinéaires

On dit que deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont *colinéaires* lorsqu'il existe un nombre réel λ tel que :

$$\vec{v} = \lambda \vec{u}.$$

On peut exprimer cette définition par une propriété dans un repère du plan.

Propriété 1

Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel λ tel que :

$$\begin{cases} x_{\vec{v}} = \lambda x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{v}} = \lambda y_{\vec{u}} \end{cases}$$

où $(x_{\vec{u}}; y_{\vec{u}})$ et $(x_{\vec{v}}; y_{\vec{v}})$ désignent les coordonnées respectives des vecteurs \vec{u} et \vec{v} dans un repère du plan.

Ce qui revient à dire que les coordonnées de deux vecteurs colinéaires sont proportionnelles.

Remarque :

On a en particulier :

Pour n'importe quel vecteur \vec{u} , on a : $0 \vec{u} = \vec{0}$. Donc :

Le vecteur nul est colinéaire à n'importe quel vecteur.

On déduit de la propriété précédente :

Dans un repère du plan, on considère deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} de coordonnées :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

Propriété 2 – condition de colinéarité

Avec les notations ci-dessus, les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires si, et seulement si :

$$a \times q - b \times p = 0.$$

2.1.1 Colinéarité et droites parallèles

Propriété 3

Deux droites (AB) et (MN) sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{MN} sont colinéaires.

2.1.2 Colinéarité et alignement**Propriété 4**

A, B et T sont trois points.

A, B et T sont alignés si, et seulement si, les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AT} sont colinéaires.

2.2 Vecteurs directeurs d'une droite**Définition 2 – vecteur directeur d'une droite**

A et B sont deux points distincts.

On dit qu'un vecteur \vec{u} est un *vecteur directeur* de la droite (AB) lorsque \vec{u} et \overrightarrow{AB} sont colinéaires.

Remarque :

Si \vec{u} est un vecteur directeur de (AB) , alors \vec{u} est non nul.

Propriété 5

\vec{u} est un vecteur directeur d'une droite (AB) .

\vec{v} est un vecteur directeur d'une droite (CD) .

(AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si, \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.

2.3 Équation cartésienne d'une droite**Propriété 6**

Les nombres a et b sont deux réels tels que $(a; b) \neq (0; 0)$.

Dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan, l'ensemble des points de coordonnées $(x; y)$ qui vérifient l'équation $ax + by + c = 0$ est une droite.

ATTENTION

L'écriture $(a; b) \neq (0; 0)$ signifie l'une des trois possibilités :

- $a = 0$ et $b \neq 0$;
- ou bien : $a \neq 0$ et $b = 0$;

– ou bien encore : $a \neq 0$ et $b \neq 0$;

Autrement dit, l'un au moins des nombres a et b est non nul.

Définition 3 – équation cartésienne d'une droite

Avec les notations précédentes, une équation du type :

$$ax + by + c = 0$$

est appelée *équation cartésienne* d'une droite.

Remarques :

- N'importe quelle droite du plan possède une équation cartésienne (que cette droite soit parallèle ou sécante avec l'axe des ordonnées).
- N'importe quelle droite du plan possède une infinité d'équations cartésiennes.
- Pour une droite sécante avec l'axe des ordonnées, il existe une *équation réduite* unique, que l'on peut déduire de n'importe laquelle de ses équations cartésiennes.
- Dans une équation cartésienne d'une droite, l'un au moins des nombres a et b est non nul.

Propriété 7

Les nombres a et b sont deux réels tels que : $(a; b) \neq (0; 0)$.

Dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan, (d) est une droite, d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$.

Le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (d) .

ATTENTION

Il faut veiller à bien utiliser les coordonnées d'un vecteur lorsqu'on veut établir une équation cartésienne d'une droite à partir d'un vecteur directeur : si $\vec{u} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur d'une droite (d) , alors une équation cartésienne de (d) est de la forme :

$$qx - py + r = 0$$

Remarque :

Dans le cas particulier où $b \neq 0$, le vecteur $\vec{u} \left(1; \frac{-a}{b} \right)$ est aussi un vecteur directeur de la droite (d) .

2.4 Repères du plan

Propriété 8

A , B et C sont trois points non alignés du plan.

Pour n'importe quel point M du plan, il existe deux réels α et β , uniques, tels que :

$$\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC}.$$

Définition 4 – repère et coordonnées

Avec les notations de la propriété précédente, on dit que les coordonnées du point M sont $(\alpha; \beta)$ dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$.

3 DÉRIVATION (1/2)

3.1 Taux de variation

f est une fonction définie sur un intervalle I .
 a et b sont deux nombres distincts dans I .

Définition 1 - Taux de variation



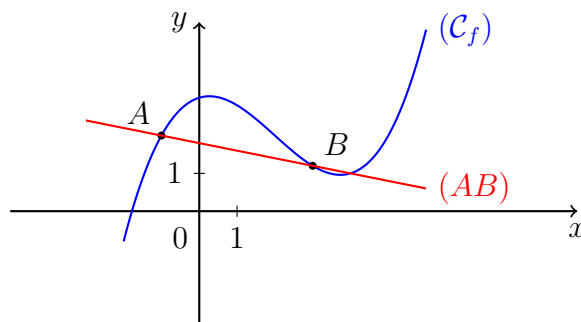
Le nombre $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est appelé *taux de variation* de la fonction f entre a et b .

Remarques

1. Si on note A et B les points de (C_f) ¹, d'abscisses respectives a et b , le taux de variation de la fonction f entre a et b n'est rien d'autre que le coefficient directeur de la droite (AB) .
2. En posant : $h = b - a$, on obtient une nouvelle écriture du taux de variation :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Exemple 1 ▷ Calculer le taux de variation de f entre A et B :



$$f : x \mapsto \frac{1}{10}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{3}{10}x + 3$$

$$x_A = -1 ; \quad x_B = 3$$

1. (C_f) désigne la représentation graphique de f .

3.2 Nombre dérivé en un point

f est une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} .
 a est un nombre de I , h est un nombre réel non nul.

Définition 2 – Nombre dérivé

Si le nombre $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ tend vers un nombre l lorsque le nombre h tend vers 0, on dit que la fonction f est **dérivable en a** .

Dans ce cas, le nombre l est appelé **nombre dérivé** de la fonction f en a . On écrit :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = l$$

Définition 3 – Nombre dérivé : notation

Le nombre dérivé de la fonction f en a (quand il existe !) est noté $f'(a)$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

Exemple 2 ▷ On donne $f: x \mapsto x^2$. Déterminer par le calcul les nombres $f'(2)$ et $f'(-3)$.

Exemple 3 ▷ On donne $g: x \mapsto \frac{1}{1+x}$. Calculer le nombre $g'(9)$.

Exemple 4 ▷ On donne $h: x \mapsto \sqrt{x+2}$. Déterminer $h'(5)$.

3.3 Nombre dérivé et tangente

Soit f une fonction dérivable en un nombre réel a de son ensemble de définition \mathcal{D}_f .

On note (\mathcal{C}_f) la représentation graphique de la fonction f .

Définition 4 – Tangente à une courbe

La droite passant par le point $A(a; f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$ est appelée **tangente** à la courbe (\mathcal{C}_f) au point A .

Propriété 1 – Équation de la tangente

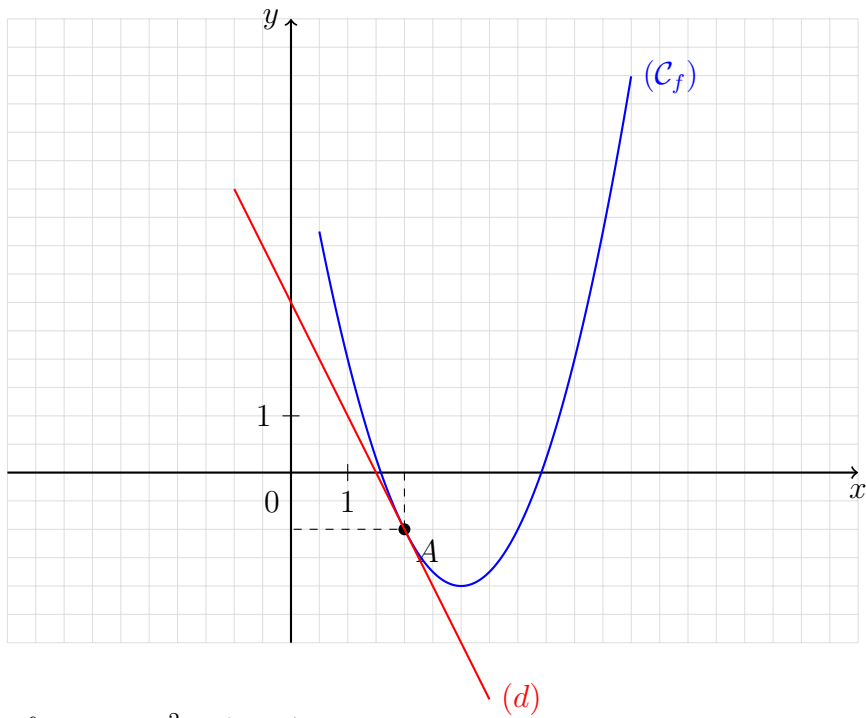
f est une fonction définie et dérivable en un réel a .

Comme f est dérivable en a , la courbe (\mathcal{C}_f) possède une tangente au point a .

De plus, la tangente à la courbe (\mathcal{C}_f) au point d'abscisse a admet pour équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

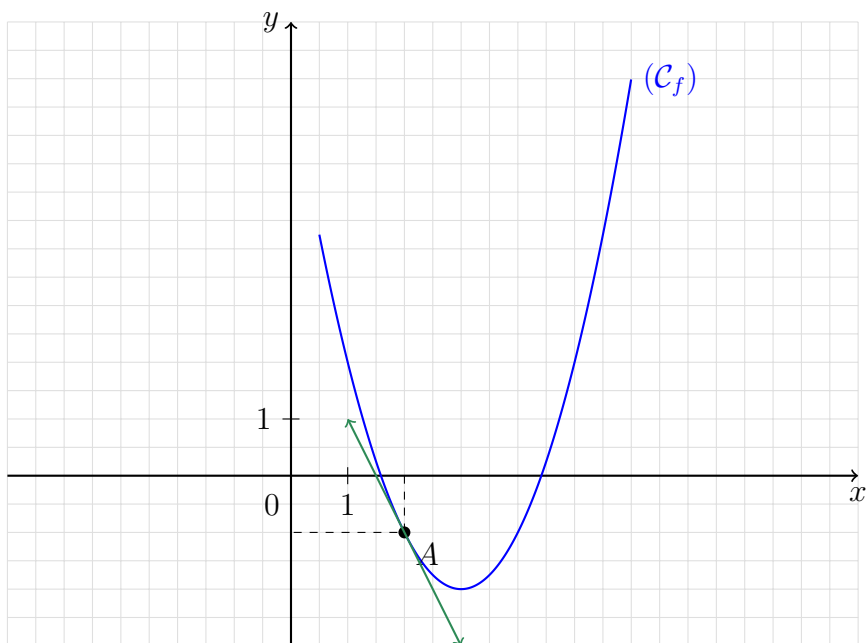
Exemple 5 ▷ Établir l'équation de la tangente (d) à la courbe (C_f) au point A .



$$f : x \mapsto x^2 - 6x + 7$$

$$x_A = 2; A \in (C_f)$$

Exemple 5 (bis) ▷



Convention de dessin : la flèche double symbolise une tangente.

4 FONCTIONS USUELLES

4.1 La fonction « carré »

La fonction $x \mapsto x^2$ est le cas le plus simple de fonction polynôme du second degré.

On étudie le signe de la fonction $x \mapsto x^2 - x$ sur \mathbb{R}^+ pour établir la propriété :

Propriété 1



- Pour n'importe quel nombre réel $x \in [0; 1]$: $0 \leq x^2 \leq x \leq 1$.
- Pour n'importe quel nombre réel $x \in [1; +\infty[$: $1 \leq x \leq x^2$.

4.2 La fonction « racine carrée »

4.2.1 Expression conjuguée

Propriété 2 – expression conjuguée



a et b sont deux nombres positifs, non tous les deux nuls. On a l'égalité :

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

4.2.2 La fonction « racine carrée »

On déduit la courbe représentative de la fonction « racine carrée » de la représentation graphique de la fonction « carré » *pour les abscisses positives* (demi-parabole) comme symétrique de cette courbe par rapport à la droite d'équation $y = x$ dans un repère orthonormé.

La propriété de la quantité conjuguée permet de démontrer :

Propriété 3 – variations



La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur \mathbb{R}^+ .

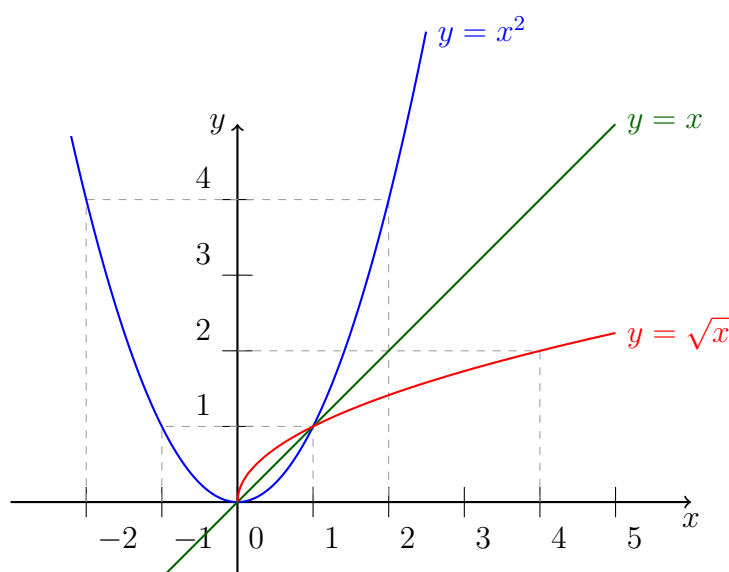
L'étude de la fonction $x \mapsto x - \sqrt{x}$ **définie sur \mathbb{R}^+** permet d'établir la propriété :

Propriété 4



- Pour n'importe quel nombre réel $x \in [0; 1]$: $0 \leq x^2 \leq x \leq \sqrt{x} \leq 1$.
- Pour n'importe quel nombre réel $x \in [1; +\infty[$: $1 \leq \sqrt{x} \leq x \leq x^2$.

Un dessin à retenir : positions relatives des courbes représentatives



4.3 La fonction « valeur absolue »

4.3.1 Définition

Définition 1 - valeur absolue d'un nombre

Pour n'importe quel nombre réel a , on note $|a|$ le nombre appelé *valeur absolue de a* , défini par :

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \text{ est un nombre positif ou nul,} \\ -a & \text{sinon (c.-à-d. pour } a \text{ négatif).} \end{cases}$$

4.3.2 Propriétés

Propriété 5

1. Pour n'importe quel nombre réel x , on a : $|x| \geq 0$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, |-x| = |x|$.
3. $|x| = 0 \iff x = 0$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = |x|$.

Attention!

Pour n'importe quel nombre réel *positif* x , on a : $(\sqrt{x})^2 = |x|$.

Cette propriété n'est vraie que pour les nombres positifs :

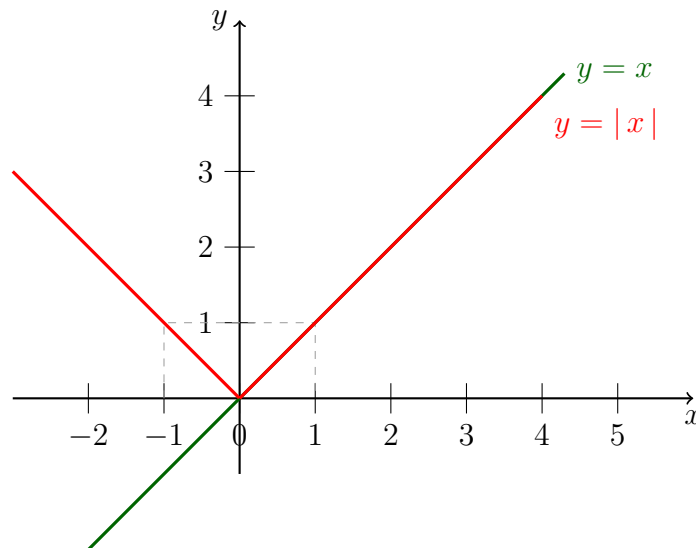
$$(\sqrt{x})^2 = \sqrt{x^2} \text{ si, et seulement si, } x \text{ est positif !}$$

On définit ensuite la fonction « valeur absolue » comme la fonction $x \mapsto |x|$.

Propriété 6



1. La fonction $x \mapsto |x|$ est strictement décroissante sur \mathbb{R}^- .
2. La fonction $x \mapsto |x|$ est strictement croissante sur \mathbb{R}^+ .



La représentation graphique de $x \mapsto |x|$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (d'équation $x = 0$).

4.4 La fonction « inverse »

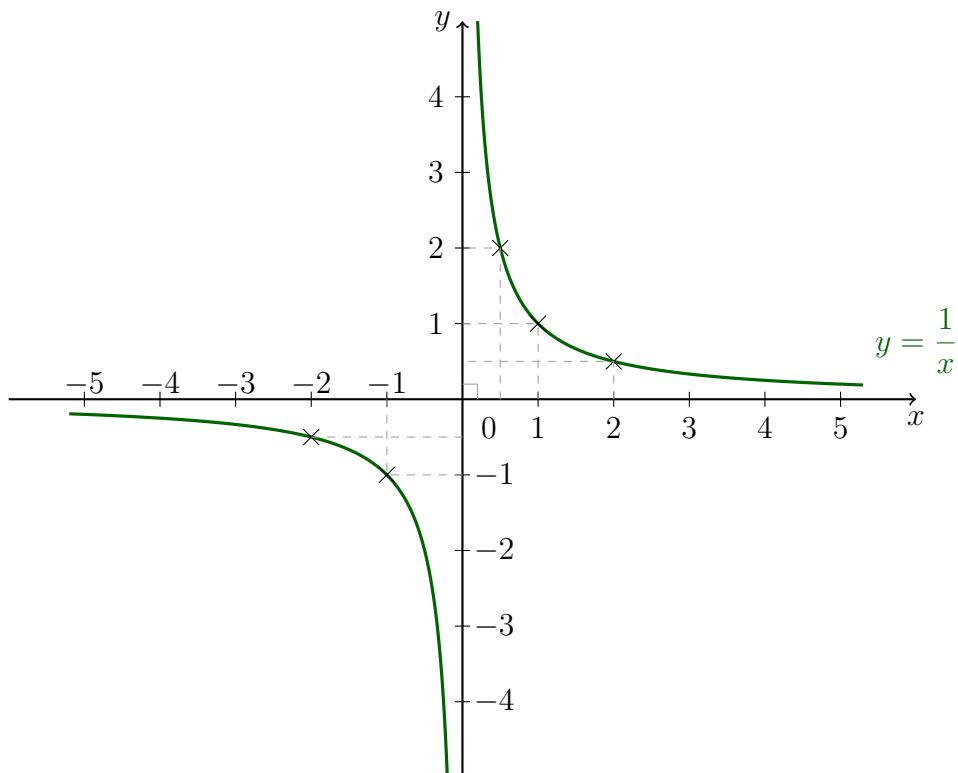
La fonction « inverse » est définie par :

$$\begin{aligned}]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Propriété 7 - variations



1. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $] -\infty; 0[$.
2. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $] 0; +\infty[$.



4.5 Variations des fonctions composées

Propriété 8 – variations de $u + k$

I désigne un intervalle de \mathbb{R} .
 u est une fonction définie sur I .
 k est un nombre réel.

On définit la fonction :

$$\begin{aligned} f : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto u(x) + k \end{aligned}$$

La fonction f possède le même sens de variation que la fonction u sur I .

Par commodité, la fonction f est notée $u + k$:

$$\forall x \in I, (u + k)(x) = u(x) + k.$$

Propriété 9 – variations de $k u$

I désigne un intervalle de \mathbb{R} .
 u est une fonction définie sur I .
 k est un nombre réel.

$$\begin{aligned} g : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto k \times u(x) \end{aligned}$$

- Si $k > 0$, alors les fonctions g et u possèdent le **même sens de variation** sur I .
- Si $k < 0$, alors g et u possèdent des **sens de variation contraires** sur I .

La fonction $x \mapsto k \times u(x)$ est notée $k u$.

Propriété 10 – variations de \sqrt{u}

I désigne un intervalle de \mathbb{R} .
 u est une fonction définie sur I et **positive sur I** :

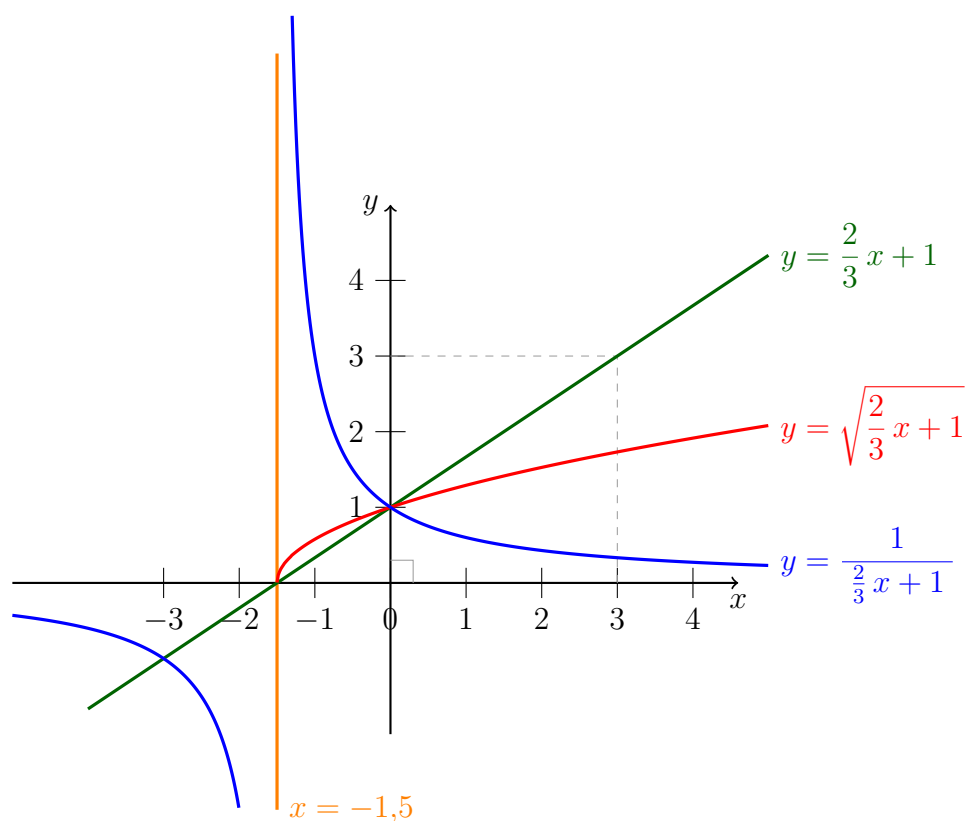
$$\forall x \in I, u(x) \geq 0.$$

Les fonctions u et $x \mapsto \sqrt{u(x)}$ possèdent le même sens de variation sur I .

Propriété 11 – variations de $\frac{1}{u}$

u est une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} .
 On suppose que **la fonction u ne s'annule pas sur I** .

Les fonctions u et $x \mapsto \frac{1}{u(x)}$ ont des variations de sens contraires sur I .



4.6 Exercices

Exercice 1

Établir (éventuellement avec une tabulation sur la calculatrice) la liste des carrés des vingt-cinq premiers entiers naturels.

Exercice 2

Déduire de la liste précédente la liste des racines carrées des premiers carrés parfaits (un entier naturel n est un carré parfait lorsque $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$).

Exercice 3

Donner un encadrement de $\sqrt{200}$ par deux entiers naturels consécutifs.

Exercice 4

Donner sans calculatrice le nombre de chiffres de la partie entière du nombre $\sqrt{11905}$.

Exercice 5

Comparer sans calculatrice les nombres $2\sqrt{19}$ et $6\sqrt{2}$.

Exercice 6

Exprimer chacun des nombres A , B , C et D sans racine carrée au dénominateur :

$$A = \frac{1}{\sqrt{3}-1}; \quad B = \frac{5}{2+2\sqrt{3}}; \quad C = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}; \quad D = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}.$$

Exercice 7

Étudier les variations de la fonction f définie sur \mathbb{R}^+ par $f(x) = x - \sqrt{x}$.

5 DÉRIVATION (2/2)

5.1 Fonction dérivée

f désigne une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} .

Définition 1 – Fonction dérivée

Lorsque, pour n'importe quel nombre a de I , le nombre dérivé de f existe en a , on dit que f est *dérivable* sur l'intervalle I .

Lorsque f est dérivable sur I , on appelle *fonction dérivée* de f la fonction notée f' :

$$\begin{aligned} f' : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(x) \end{aligned}$$

Exemple

Pour la fonction h :

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 3x^2 - 5x + 2 \end{aligned}$$

On démontre que h est dérivable partout sur \mathbb{R} .

La fonction h' est définie par :

$$\begin{aligned} h' : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 6x - 5 \end{aligned}$$

5.2 Fonctions dérivées des fonctions usuelles

Propriété 1

fonction	définie sur	dérivable sur	fonction dérivée
$f(x) = ax + b$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$f'(x) = a$
$f(x) = k$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^2$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	\mathbb{R}^*	\mathbb{R}^*	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$]0; +\infty[$	$]0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

5.3 Fonctions dérivées et opérations

5.3.1 Fonction dérivée de la somme de deux fonctions

Propriété 2



Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I de \mathbb{R} .

Alors la fonction $x \mapsto u(x) + v(x)$ est définie et dérivable sur I , avec :

$$\forall x \in I, (u + v)'(x) = u'(x) + v'(x)$$

On écrit plus simplement :

$$(u + v)' = u' + v'$$

On peut démontrer la propriété analogue pour la différence :

$$(u - v)' = u' - v'$$

5.3.2 Fonction dérivée du produit par une constante

Propriété 3 - $k \times u$



La fonction u est définie et dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R} , k est un nombre réel.

Alors la fonction $x \mapsto k \times u(x)$ est définie et dérivable sur I , avec :

$$\forall x \in I, (k \times u)'(x) = k \times u'(x)$$

On écrit plus simplement :

$$(k u)' = k u'$$

Propriété 4



Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I de \mathbb{R} .

Alors la fonction $x \mapsto u(x) \times v(x)$ est définie et dérivable sur I , avec :

$$\forall x \in I, (u \times v)'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$$

On écrit plus simplement :

$$(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$$

5.3.3 Quotient et inverse

Propriété 5

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I de \mathbb{R} .

On suppose de plus que v ne s'annule pas sur I .

Alors la fonction $x \mapsto \frac{u(x)}{v(x)}$ est définie et dérivable sur I , avec :

$$\forall x \in I, \left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{(v(x))^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

On en déduit la propriété pour la dérivée de la fonction inverse d'une fonction :

Propriété 6

Soit v une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R} .

On suppose de plus que v ne s'annule pas sur I .

Alors la fonction $x \mapsto \frac{1}{v(x)}$ est définie et dérivable sur I , avec :

$$\forall x \in I, \left(\frac{1}{v}\right)'(x) = \frac{-v'(x)}{(v(x))^2}$$

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$$

5.4 Dérivation et variations

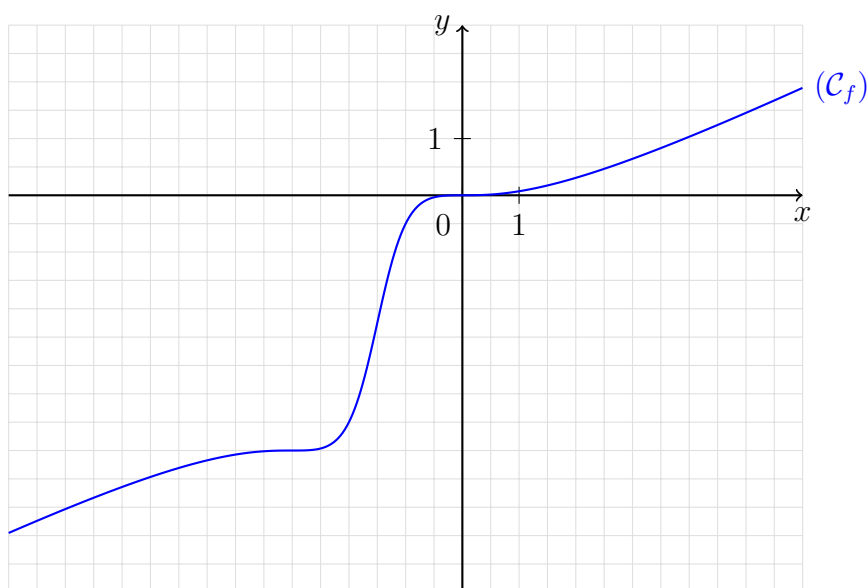
Propriété 7

f est une fonction dérivable sur un intervalle I .

Si f est strictement croissante sur I , alors :

$$\forall x \in I, f'(x) \geq 0.$$

Il existe une propriété analogue pour une fonction strictement décroissante sur un intervalle.



$$f : x \mapsto \frac{x^3}{2(x^2 + 3x + 3)}$$

Propriété 8 – signe de la dérivée et monotonie

f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

- Si, pour tout x de I , $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I ;
- Si, pour tout x de I , $f'(x) > 0$ (sauf peut-être pour un nombre fini de valeurs de x pour lesquelles $f'(x) = 0$), alors f est strictement croissante sur I ;
- Si, pour tout x de I , $f'(x) < 0$ (sauf peut-être pour un nombre fini de valeurs de x pour lesquelles $f'(x) = 0$), alors f est strictement décroissante sur I .

6.1 Rappels

6.1.1 Caractère : valeur et effectif

On considère une série statistique à caractère numérique :

valeur du caractère	x_1	x_2	\dots	x_p
effectif	n_1	n_2	\dots	n_p

- La série possède p valeurs distinctes du caractère.
- En pratique, on organise le tableau en classant les valeurs x_i par **ordre croissant** :

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_p$$

6.1.2 Effectif, effectif total

Définition 1 – effectif, effectif total



- Le nombre noté n_i est appelé **effectif** de la valeur x_i .
- La somme des effectifs de toutes les valeurs du caractère est appelée **effectif total** de la série.

En notant N l'effectif total : $N = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_p$.

6.1.3 Fréquence

Définition 2 – fréquence d'un caractère



On appelle **fréquence** de la valeur x_i , notée f_i , le quotient de l'effectif de la valeur x_i par l'effectif total :

$$f_i = \frac{n_i}{n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_p}$$

- La fréquence d'une valeur du caractère est un nombre de l'intervalle $[0; 1]$.
- On peut exprimer la fréquence d'une valeur en pourcentage.

6.1.4 Effectif cumulé croissant

Définition 3 – effectif cumulé croissant



L'**effectif cumulé croissant** de la valeur x_i est la somme des effectifs pour toutes les valeurs du caractère inférieures ou égales à x_i :

$$n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_i$$

6.1.5 Fréquence cumulée croissante

Définition 4 – fréquence cumulée croissante



De manière analogue, on définit la **fréquence cumulée croissante** comme la somme des fréquences des valeurs du caractère inférieures ou égales à x_i :

$$f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_i$$

Propriété 1



La **fréquence cumulée croissante** du caractère x_i est égale au quotient de l'effectif cumulé croissant de la valeur x_i par l'effectif total :

$$\frac{n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_i}{n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_p}$$

6.1.6 Moyenne

Définition 5 – moyenne

La **moyenne** de la série statistique, notée \bar{x} , est le nombre défini par :

$$\bar{x} = \frac{n_1 \times x_1 + n_2 \times x_2 + \cdots + n_p \times x_p}{n_1 + n_2 + \cdots + n_p}$$

La moyenne est un indicateur de position.

6.1.7 La notation Σ

La formule précédente s'écrit avec la notation « somme » :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^p n_i \times x_i}{\sum_{i=1}^p n_i}$$

La lettre majuscule « Σ » (on lit « sigma ») est la lettre S de l'alphabet grec.

La formule peut s'écrire aussi :

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i \times x_i$$

Propriété 2

On a l'égalité :

$$\bar{x} = f_1 \times x_1 + f_2 \times x_2 + \cdots + f_p \times x_p$$

Cette propriété permet donc de calculer la moyenne d'une série statistique à l'aide des fréquences.

Remarque :

La définition précédente de la moyenne concerne les séries à **caractère discret**, dont les valeurs sont isolées (c.-à-d. peu nombreuses).

Cette définition s'applique aussi aux séries à **caractère continu** : dans ce cas, les valeurs sont regroupées en **classes**, et on applique la formule en prenant pour valeur du caractère le **centre** de chaque classe.

6.1.8 Médianes et quartiles

Définition 6 – médiane



- Une médiane d'une série statistique est un nombre noté M_e , pour lequel :
- au moins 50 % des valeurs sont inférieures à M_e ;
 - au moins 50 % des valeurs sont supérieures à M_e .

La médiane est un indicateur de position.

Définition 7 – quartiles Q_1 et Q_3



- Le 1^{er} quartile Q_1 est la plus petite valeur du caractère, pour laquelle au moins 25 % des valeurs sont inférieures à Q_1 .
- Le 3^e quartile Q_3 est la plus petite valeur du caractère, pour laquelle au moins 75 % des valeurs sont inférieures à Q_3 .

Les quartiles sont des indicateurs de dispersion.

En pratique, on fait la convention suivante :

- Pour un **effectif total impair**, on prend comme médiane la valeur « centrale » du caractère.
- Pour un **effectif total pair**, on peut prendre comme médiane la demi-somme des deux valeurs « centrales ».

Pour compléter l'étude d'une série statistique, on observe deux autres indicateurs de dispersion :

Définition 8 – étendue



L'**étendue** est la différence $x_p - x_1$.

Définition 9 – écart interquartile



- L'**écart interquartile** est la différence $Q_3 - Q_1$.
- L'intervalle $[Q_1 ; Q_3]$ est appelé **intervalle interquartile**.

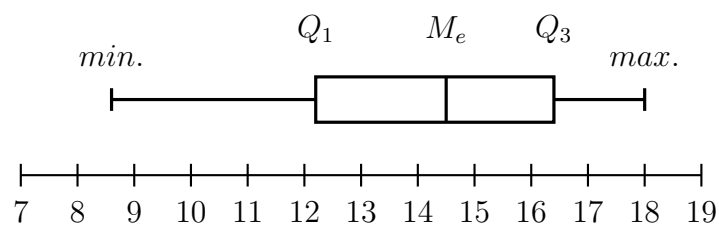
6.2 Diagramme en boîte

Un *diagramme en boîte* (on dit aussi une « boîte à moustaches ») est un graphique résumant une série statistique.

Ce graphique comporte plusieurs informations concernant la série :

- les valeurs minimale et maximale du caractère ;
- la médiane ;
- les quartiles ;
- une « boîte » (un rectangle) faisant apparaître l'écart interquartile.

Un exemple de diagramme en boîte



6.3 Variance et écart-type

On considère une série statistique à caractère quantitatif :

valeur	x_1	x_2	\dots	x_p
effectif	n_1	n_2	\dots	n_p

Définition 10 – variance

On appelle *variance* le nombre V défini par :

$$V = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i (x_i - \bar{x})^2$$

(on rappelle que le nombre \bar{x} désigne la moyenne de la série)

Définition 11 – écart-type

On appelle *écart-type* le nombre $\sigma = \sqrt{V}$.

(où la lettre V désigne la variance de la série)

Propriété 3

Avec les notations précédentes, l'écart-type vérifie l'égalité :

$$V = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i \times x_i^2 \right) - (\bar{x})^2$$

6.4 Indicateurs d'une série statistique

Les indicateurs de position et de dispersion permettent l'interprétation d'une série statistique :

- l'intervalle $[Q_1; Q_3]$ contient 50 % des valeurs du caractère de la série ;
- l'écart interquartile $Q_3 - Q_1$ mesure la dispersion autour de la médiane M_e ;
- la médiane M_e partage la série en deux sous-séries de même effectif (les valeurs étant ordonnées par ordre croissant) ;
- l'écart-type σ mesure la dispersion autour de la moyenne \bar{x} .