Mathématiques

Pascal CHAUVIN

1ère S

4 juin 2018

Table des matières

1 Second degré **7**
- 1.1 Polynôme du second degré 7
  - 1.1.1 Expression du second degré 7
  - 1.1.2 Forme canonique 7
  - 1.1.3 Équation du second degré 8
- 1.2 Fonction du second degré 8
  - 1.2.1 Fonction polynôme du second degré 8
  - 1.2.2 Variations et extremum 9
  - 1.2.3 Signe du trinôme 9
- 1.3 Exercices 11

2 Géométrie plane **15**
- 2.1 Condition de colinéarité 15
  - 2.1.1 Colinéarité et droites parallèles 15
  - 2.1.2 Colinéarité et alignement 16
- 2.2 Vecteurs directeurs d'une droite 16
- 2.3 Équation cartésienne d'une droite 16
- 2.4 Repères du plan 17

3 Dérivation (1/2) **19**
- 3.1 Taux de variation 19
- 3.2 Nombre dérivé en un point 20
- 3.3 Nombre dérivé et tangente 20

4 Fonctions usuelles **23**
- 4.1 La fonction « carré » 23
- 4.2 La fonction « racine carrée » 23
  - 4.2.1 Expression conjuguée 23
  - 4.2.2 La fonction « racine carrée » 23
- 4.3 La fonction « valeur absolue » 24
  - 4.3.1 Définition 24
  - 4.3.2 Propriétés 24
- 4.4 La fonction « inverse » 26
- 4.5 Variations des fonctions composées 27
- 4.6 Exercices 28

5 Dérivation (2/2) **31**
- 5.1 Fonction dérivée 31
- 5.2 Fonctions dérivées des fonctions usuelles 31
- 5.3 Fonctions dérivées et opérations 32
  - 5.3.1 Fonction dérivée de la somme de deux fonctions 32
  - 5.3.2 Fonction dérivée du produit par une constante 32
  - 5.3.3 Quotient et inverse 33
- 5.4 Dérivation et variations 34

6 Statistiques **35**
6.1 Rappels 35
6.1.1 Caractère : valeur et effectif 35
6.1.2 Effectif, effectif total 35
6.1.3 Fréquence 35
6.1.4 Effectif cumulé croissant 36
6.1.5 Fréquence cumulée croissante 36
6.1.6 Moyenne 37
6.1.7 La notation Σ 37
6.1.8 Médianes et quartiles 38
6.2 Diagramme en boîte 39
6.3 Variance et écart-type 40
6.4 Indicateurs d'une série statistique 41

7 Suites (1/2) **43**
7.1 Définition et notations 43
7.2 Suites arithmétiques 44
7.3 Suites géométriques 45
7.4 Suites arithmético-géométriques 46

8 Suites (2/2) **47**
8.1 Variations d'une suite 47
8.2 Variations d'une suite arithmétique 48
8.3 Variations d'une suite géométrique positive 48
8.4 Limite d'une suite 50

9 Produit scalaire **51**
9.1 Définition 51
9.2 Vecteurs orthogonaux 52
9.3 Norme et produit scalaire 54
9.4 Propriétés 54

10 Probabilités **55**
10.1 Variables aléatoires 55
10.1.1 Loi de probabilité d'une variable aléatoire 55
10.1.2 Espérance d'une variable aléatoire 56
10.1.3 Variance et écart-type d'une variable aléatoire 56
10.1.4 Propriétés 56
10.2 Loi binomiale 57
10.3 Expérience de Bernouilli 57
10.4 Répétition d'expériences de Bernouilli 58

11 Coefficients binomiaux **59**
11.1 Définition 59
11.2 Propriétés 59
11.2.1 Représentations visuelles des propriétés des coeff. binomiaux 60
11.2.2 Le triangle de Pascal 60

12 Trigonométrie **61**
12.1 Rappel : le radian 61
12.2 Angles orientés de vecteurs 62
12.2.1 Mesure principale d'un angle orienté de vecteurs 63
12.3 Relations trigonométriques 64

1 Second degré

1.1 Polynôme du second degré

a, b et c sont trois nombres réels ; a est non nul.
x est un nombre réel.

On distingue :

— l'*expression* $a\,x^2 + b\,x + c$, qui désigne le nombre de valeur « $a \times x^2 + b \times x + c$ ».

— la *fonction* $x \longmapsto a\,x^2 + b\,x + c$.

1.1.1 Expression du second degré

Définition 1 – ***Polynôme du second degré***

a, b et c sont trois nombres réels ; a est non nul.

L'expression $a\,x^2 + b\,x + c$ est appelée « *polynôme du second degré* » (en x).

On rencontre aussi le nom « *trinôme* du second degré ».

Exemple 1 ▷ $x^2 - \dfrac{4}{3}$ est un polynôme du second degré.

Exemple 2 ▷ $(3\,x - 7)\,(2 + 3\,x) + 2\,x^2$ est un polynôme du second degré.

1.1.2 Forme canonique

a, b et c sont trois nombres réels ; a est non nul.
Pour n'importe quel nombre x, on peut démontrer l'égalité :

$$a\,x^2 + b\,x + c = a\left(x - \frac{-b}{2\,a}\right)^2 + \left(\frac{-b^2 + 4\,a\,c}{4\,a}\right).$$

On pose alors : $\boxed{\alpha = \dfrac{-b}{2\,a}}$ et $\boxed{\beta = \dfrac{-b^2 + 4\,a\,c}{4\,a}}$.

(α et β sont prononcées « alpha » et « bêta », ce sont les lettres a et b de l'alphabet grec.)

On obtient alors :

$$a\,x^2 + b\,x + c = a\,(x - \alpha)^2 + \beta\,.$$

Définition 2 – ***Forme canonique***

a, b et c sont trois nombres réels ; a est non nul.

L'expression $a\,(x - \alpha)^2 + \beta$ est appelée *forme canonique* de $a\,x^2 + b\,x + c$.

Exemple 1 ▷ L'expression $\frac{3}{2}\,(x-2)^2 - 4$ est la forme canonique du polynôme...

Exemple 2 ▷ Quelle est la forme canonique du trinôme $x^2 + 10\,x - 39$?

La connaissance de la forme canonique d'un trinôme du second degré apporte de nombreuses informations à son sujet : il est donc extrêmement important de savoir l'établir.

1.1.3 Équation $ax^2 + bx + c = 0$

On s'intéresse à l'équation du second degré $a\,x^2 + b\,x + c = 0$. Cette équation peut comporter aucune, une ou deux solutions, selon les valeurs des nombres a, b et c.

Définition 3 – ***Discriminant***

a, b et c sont trois nombres réels ; $a \neq 0$.

L'expression $b^2 - 4\,a\,c$ est appelée *discriminant* de l'expression $a\,x^2 + b\,x + c$.

Le discriminant est souvent noté Δ (prononcé « delta majuscule », c'est la lettre D de l'alphabet grec) :

$$\Delta = b^2 - 4\,a\,c$$

Propriété 1

a, b et c sont trois nombres réels ; a est non nul.

On note Δ le discriminant de $a\,x^2 + b\,x + c$:

1. Si $\Delta = 0$, alors $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ possède une solution réelle de valeur $\frac{-b}{2\,a}$;
2. Si $\Delta > 0$, alors $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ possède deux solutions réelles ;
   ce sont les nombres $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\,a}$ et $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\,a}$
3. Si $\Delta < 0$, alors $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ ne possède pas de solution réelle.

Dans le premier et le second cas, on obtient une forme factorisée du trinôme, à partir de la forme canonique.

Exemple 1 ▷ Indiquer le nombre de solutions de $x^2 + 10\,x - 39 = 0$, et leurs valeurs le cas échéant.

Exemple 2 ▷ Résoudre l'équation $9\,x^2 + 6\,x + 1 = 0$.

Exemple 3 ▷ Donner une forme factorisée de l'expression $2\,x^2 - 5\,x - 12$.

1.2 Fonction du second degré

L'étude d'une fonction du second degré s'appuie sur les définitions et propriétés précédentes.

1.2.1 Fonction polynôme du second degré

Définition 4 – *Fonction polynôme du second degré*

a, b et c sont trois nombres réels ; a est non nul.

La fonction $f : x \longmapsto a\,x^2 + b\,x + c$, définie sur $\mathbb{R}$, est appelée « *fontion polynôme du second degré* ».

Avec les notations précédentes, on démontre : $\boxed{f(\alpha) = \beta}$.

1.2.2 Variations et extremum

a, b et c sont trois nombres réels ; a est non nul.

Les nombres α et β sont définis comme précédemment.

Propriété 2

a, b et c sont trois nombres réels ; a est non nul.

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$.

1. Si $a > 0$, alors :
   - f est décroissante sur $]-\infty; \alpha]$;
   - f est croissante sur $[\alpha; +\infty[$;
   - f possède un *minimum global* sur $\mathbb{R}$, atteint en $x = \alpha$ et de valeur β :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant \beta$$

   (cette écriture signifie : « pour n'importe quel nombre réel x, $f(x) \geqslant \beta$ »)
2. Si $a < 0$, alors :
   - f est croissante sur $]-\infty; \alpha]$;
   - f est décroissante sur $[\alpha; +\infty[$;
   - f possède un *maximum global* sur $\mathbb{R}$, atteint en $x = \alpha$ et de valeur β :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant \beta$$

1.2.3 Signe du trinôme $a\,x^2 + b\,x + c$

a, b et c sont trois nombres réels ; $a \neq 0$.

On s'intéresse au signe de $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$.

Propriété 3

	si $\Delta < 0$	si $\Delta > 0$
si $a > 0$	$f(x)$ est toujours strictement positif.	$f(x)$ est négatif entre les racines, et positif sinon.
si $a < 0$	$f(x)$ est toujours strictement négatif.	$f(x)$ est positif entre les racines, et négatif sinon.

Cette propriété provient de l'égalité :

$$\begin{aligned} a\,x^2 + b\,x + c &= a\,(x-\alpha)^2 + \beta \\ &= a\left[(x-\alpha)^2 + \frac{\beta}{a}\right] \\ &= a\left[(x-\alpha)^2 + \frac{-\Delta}{4\,a^2}\right] \end{aligned}$$

1.3 Exercices

Exercice 1

À l'aide des formules de distributivité et des identités remarquables, développer et réduire :

1. L'expression $A = \left(-2\,x + \dfrac{1}{3}\right)\left(3\,x - \dfrac{5}{3}\right)$.
2. L'expression $B = \left(5\,x + \sqrt{3}\right)^2$.
3. L'expression $C = \left(3\,x - \dfrac{5}{6}\right)^2$.
4. L'expression $D = \left(4\,x + \dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)\left(4\,x - \dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$.

Exercice 2

1. (a) À l'aide d'une identité remarquable, écrire la forme canonique de $x^2 - 4\,x$.
   (b) En déduire la forme canonique de $x^2 - 4\,x + 5$.
2. Mettre sous forme canonique $A = x^2 + 10\,x - 1$ et $B = 2\,x^2 + 8\,x + 3$.

Exercice 3

Mettre sous forme canonique les polynômes du second degré suivants :

1. Le polynôme $x^2 + 4\,x + 1$.
2. Le polynôme $-2\,x^2 + 3\,x - 6$.

Exercice 4

Donner le nombre de solutions de l'équation : $\sqrt{2}\,x^2 - x = -\dfrac{1}{2}$.

Exercice 5

a, b et c désignent trois nombres réels.

1. Écrire un algorithme qui calcule le nombre α et le nombre β pour la forme canonique du trinôme $a\,x^2 + b\,x + c$.
2. Écrire le programme correspondant pour la calculatrice.

Exercice 6

a, b et c désignent trois nombres réels.

1. Écrire un algorithme qui indique le nombre de solutions de l'équation $a\,x^2 + b\,x + c = 0$.
2. Écrire le programme correspondant pour la calculatrice.

Exercice 7

Résoudre l'équation : $2\,x^2 - 3\,x + 1 = 0$.

Exercice 8

Une ville avec une fortification carrée (côté de longueur inconnue) comprend une porte au milieu de chaque côté.

Énoncé

À l'extérieur de la ville, vingt pas après la porte Nord se trouve un arbre. Si tu quittes la ville par la porte Sud, marche quatorze pas vers le Sud puis mille sept cent soixante-quinze pas vers l'Ouest, et tu commenceras tout juste à apercevoir l'arbre.

Tiré du « Jiuzhang suanshu » ou « Neuf chapitres sur l'art du calcul », ouvrage chinois daté de 200 ans avant J.C. composé de 246 problèmes ayant pour but de fournir des méthodes pour résoudre les problèmes quotidiens de l'ingénierie, de l'arpentage, du commerce et de la fiscalité.

Exercice 9

Énoncé

« Un carré et dix racines sont égaux à trente-neuf en nombre. »

Ce problème s'exprime de façon moderne de la manière suivante :

$$x^2 + 10\,x = 39$$

Pour les géomètres arabes du VII^e^ au XV^e^ siècle de notre ère, les problèmes du second degré reçoivent une résolution algébrique justifiée géométriquement.

On donne ci-dessous une adaptation moderne de la solution proposée :

Construire un carré d'aire x^2.

Sur deux côtés du carré, construire un rectangle dont le deuxième côté mesure 5 unités.

Compléter la figure pour obtenir un carré.

Exercice 10

La cinquième partie de la troupe, moins trois, élevée au carré, était allée dans une caverne et un singe était en vue, grimpé sur une branche. Dis combien ils étaient.

Les singes de Bhāskara (XII^e^ siècle)
Source : Mathématiques au fil des âges, éd. Gauthier-Villars

Exercice 11

(énoncé modifié)

On considère l'expression $E = 3\,x^2 - 42\,x + 148$, et on veut démontrer :

Pour n'importe quelle valeur de x, $E \geqslant 1$.

1. On note $F = E - 1$. Développer et réduire F.
2. Établir la forme canonique de F.
3. Étudier le signe de F, puis conclure.

Exercice 12

On considère la fonction $f : x \longmapsto -4\,x^2 - 16\,x - 13$.

1. Établir la forme canonique de $f(x)$.
2. Prouver que : $f(x) \leqslant 4$, pour n'importe quelle valeur du nombre réel x.

   (ce qu'on écrira symboliquement : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant 4$*)*

3. Prouver que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant 7$.
4. Est-il exact que $f(x) \leqslant 2$, pour n'importe quelle valeur de x ?
5. Quel est le plus petit nombre M tel que, pour n'importe quel nombre x, on a $f(x) \leqslant M$?

Exercice 13

On considère la fonction $f : x \longmapsto 3\,(x-1)^2 + 2$.

1. La fonction f est représentée par une parabole : préciser les coordonnées de son sommet.
2. Étudier les variations de la fonction f (on dressera le tableau de variations de f).
3. Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 4$.

Exercice 14

On considère la fonction du second degré g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \dfrac{1}{2}\,x^2 - 5\,x + \dfrac{39}{2}$.

1. Montrer que la forme canonique de g est :

$$g(x) = \frac{1}{2}\,(x-5)^2 + 7\,.$$

2. En déduire le minimum de g sur $\mathbb{R}$.

2 Géométrie plane

2.1 Condition de colinéarité

On rappelle la définition suivante :

Définition 1 – *vecteurs colinéaires*

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *colinéaires* lorsqu'il existe un nombre réel λ tel que :

$$\vec{v} = \lambda \, \vec{u} \, .$$

On peut exprimer cette définition par une propriété dans un repère du plan.

Propriété 1

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel λ tel que :

$$\begin{cases} x_{\vec{v}} = \lambda \, x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{v}} = \lambda \, y_{\vec{u}} \end{cases}$$

où $(x_{\vec{u}}; y_{\vec{u}})$ et $(x_{\vec{v}}; y_{\vec{v}})$ désignent les coordonnées respectives des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans un repère du plan.

Ce qui revient à dire que les coordonnées de deux vecteurs colinéaires sont proportionnelles.

Remarque :

On a en particulier :

Pour n'importe quel vecteur $\vec{u}$, on a : $0 \, \vec{u} = \vec{0}$. Donc :

Le vecteur nul est colinéaire à n'importe quel vecteur.

On déduit de la propriété précédente :

Dans un repère du plan, on considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

Propriété 2 – *condition de colinéarité*

Avec les notations ci-dessus, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si :

$$a \times q - b \times p = 0 \, .$$

2.1.1 Colinéarité et droites parallèles

Propriété 3

Deux droites (AB) et (MN) sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires.

2.1.2 Colinéarité et alignement

Propriété 4

A, B et T sont trois points.

A, B et T sont alignés si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AT}$ sont colinéaires.

2.2 Vecteurs directeurs d'une droite

Définition 2 – *vecteur directeur d'une droite*

A et B sont deux points distincts.

On dit qu'un vecteur $\vec{u}$ est un *vecteur directeur* de la droite (AB) lorsque $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

Remarque :

Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (AB), alors $\vec{u}$ est non nul.

Propriété 5

$\vec{u}$ est un vecteur directeur d'une droite (AB).
$\vec{v}$ est un vecteur directeur d'une droite (CD).

(AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

2.3 Équation cartésienne d'une droite

Propriété 6

Les nombres a et b sont deux réels tels que : $(a;b) \neq (0;0)$.

Dans un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan, l'ensemble des points de coordonnées $(x;y)$ qui vérifient l'équation $ax+by+c=0$ est une droite.

ATTENTION

L'écriture $(a;b) \neq (0;0)$ signifie l'une des trois possibilités :

- $a=0$ et $b \neq 0$;
- ou bien : $a \neq 0$ et $b=0$;

— ou bien encore : $a \neq 0$ et $b \neq 0$;

Autrement dit, l'un au moins des nombres a et b est non nul.

Définition 3 – *équation cartésienne d'une droite*

Avec les notations précédentes, une équation du type :

$$a\,x + b\,y + c = 0$$

est appelée *équation cartésienne* d'une droite.

Remarques :

- N'importe quelle droite du plan possède une équation cartésienne (que cette droite soit parallèle ou sécante avec l'axe des ordonnées).
- N'importe quelle droite du plan possède une infinité d'équations cartésiennes.
- Pour une droite sécante avec l'axe des ordonnées, il existe une *équation réduite* unique, que l'on peut déduire de n'importe laquelle de ses équations cartésiennes.
- Dans une équation cartésienne d'une droite, l'un au moins des nombres a et b est non nul.

Propriété 7

Les nombres a et b sont deux réels tels que : $(a;\ b) \neq (0;\ 0)$.

Dans un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan, (d) est une droite, d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$.

Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (d).

ATTENTION

Il faut veiller à bien utiliser les coordonnées d'un vecteur lorsqu'on veut établir une équation cartésienne d'une droite à partir d'un vecteur directeur : si $\vec{u}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur d'une droite (d), alors une équation cartétienne de (d) est de la forme :

$$qx - py + r = 0$$

Remarque :

Dans le cas particulier où $b \neq 0$, le vecteur $\vec{u}\left(1; \frac{-a}{b}\right)$ est aussi un vecteur directeur de la droite (d).

2.4 Repères du plan

Propriété 8

A, B et C sont trois points non alignés du plan.

Pour n'importe quel point M du plan, il existe deux réels α et β, uniques, tels que :

$$\overrightarrow{AM} = \alpha\,\overrightarrow{AB} + \beta\,\overrightarrow{AC}\,.$$

Définition 4 – ***repère et coordonnées***

Avec les notations de la propriété précédente, on dit que les coordonnées du point M sont $(\alpha;\ \beta)$ dans le repère $\left(A;\ \overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}\right)$.

3 Dérivation (1/2)

3.1 Taux de variation

f est une fonction définie sur un intervalle I.
a et b sont deux nombres distincts dans I.

Définition 1 – *Taux de variation*

Le nombre $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est appelé *taux de variation* de la fonction f entre a et b.

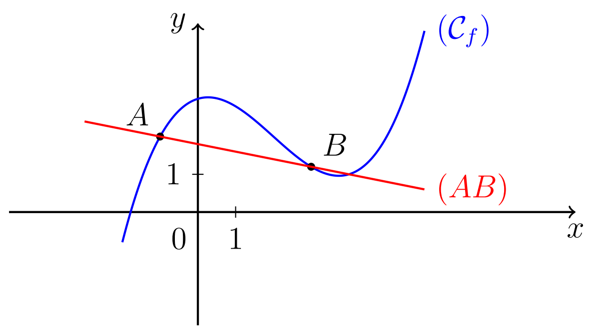
Remarques

1. Si on note A et B les points de $(\mathcal{C}_f)$ [1], d'abscisses respectives a et b, le taux de variation de la fonction f entre a et b n'est rien d'autre que le coefficient directeur de la droite (AB).

2. En posant : $h = b - a$, on obtient une nouvelle écriture du taux de variation :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Exemple 1 ▷ Calculer le taux de variation de f entre A et B :



$$f : x \longmapsto \frac{1}{10}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{3}{10}x + 3$$

$$x_A = -1\ ; \quad x_B = 3$$

1. $(\mathcal{C}_f)$ désigne la représentation graphique de f.

3.2 Nombre dérivé en un point

f est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
a est un nombre de I, h est un nombre réel non nul.

Définition 2 – *Nombre dérivé*

Si le nombre $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers un nombre l lorsque le nombre h tend vers 0, on dit que la fonction f est *dérivable en a*.

Dans ce cas, le nombre l est appelé *nombre dérivé* de la fonction f en a. On écrit :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = l$$

Définition 3 – *Nombre dérivé : notation*

Le nombre dérivé de la fonction f en a (quand il existe !) est noté $f'(a)$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$$

Exemple 2 ▷ On donne $f\colon x \longmapsto x^2$. Déterminer par le calcul les nombres $f'(2)$ et $f'(-3)$.

Exemple 3 ▷ On donne $g\colon x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$. Calculer le nombre $g'(9)$.

Exemple 4 ▷ On donne $h\colon x \longmapsto \sqrt{x+2}$. Déterminer $h'(5)$.

3.3 Nombre dérivé et tangente

Soit f une fonction dérivable en un nombre réel a de son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$.

On note $(\mathcal{C}_f)$ la représentation graphique de la fonction f.

Définition 4 – *Tangente à une courbe*

La droite passant par le point $A(\,a\,;\,f(a)\,)$ et de coefficient directeur $f'(a)$ est appelée *tangente* à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point A.

Propriété 1 – *Équation de la tangente*

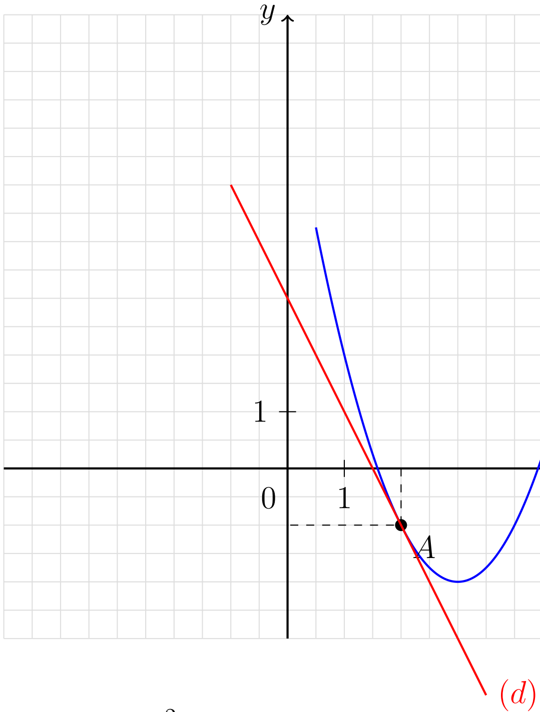
f est une fonction définie et dérivable en un réel a.

Comme f est dérivable en a, la courbe $(\mathcal{C}_f)$ possède une tangente au point a.

De plus, la tangente à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse a admet pour équation :

$$y = f'(a)\,(x-a) + f(a)$$

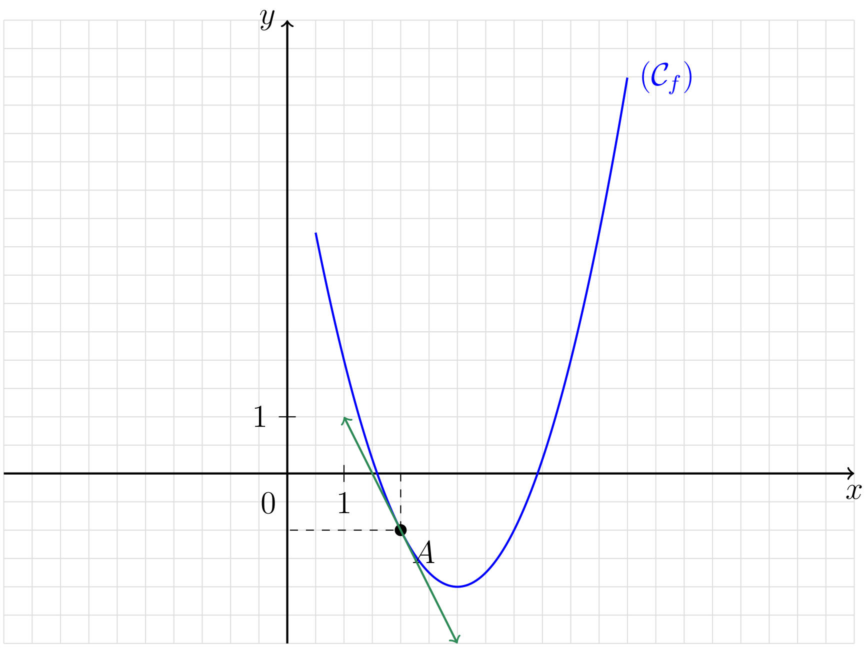
Exemple 5 ▷ Établir l'équation de la tangente (d) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point A.



$f : x \longmapsto x^2 - 6x + 7$

$x_A = 2\,;\, A \in (\mathcal{C}_f)$

Exemple 5 (bis) ▷



Convention de dessin : la flèche double symbolise une tangente.

4 Fonctions usuelles

4.1 La fonction « carré »

La fonction $x \longmapsto x^2$ est le cas le plus simple de fonction polynôme du second degré.

On étudie le signe de la fonction $x \longmapsto x^2 - x$ sur $\mathbb{R}^+$ pour établir la propriété :

Propriété 1

- Pour n'importe quel nombre réel $x \in [0;1]$: $\quad 0 \leqslant x^2 \leqslant x \leqslant 1$.
- Pour n'importe quel nombre réel $x \in [1;+\infty[$: $\quad 1 \leqslant x \leqslant x^2$.

4.2 La fonction « racine carrée »

4.2.1 Expression conjuguée

Propriété 2 – *expression conjuguée*

a et b sont deux nombres positifs, non tous les deux nuls. On a l'égalité :

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

4.2.2 La fonction « racine carrée »

On déduit la courbe représentative de la fonction « racine carrée » de la représentation graphique de la fonction « carré » *pour les abscisses positives* (demi-parabole) comme symétrique de cette courbe par rapport à la droite d'équation $y = x$ dans un repère orthonormé.

La propriété de la quantité conjuguée permet de démontrer :

Propriété 3 – *variations*

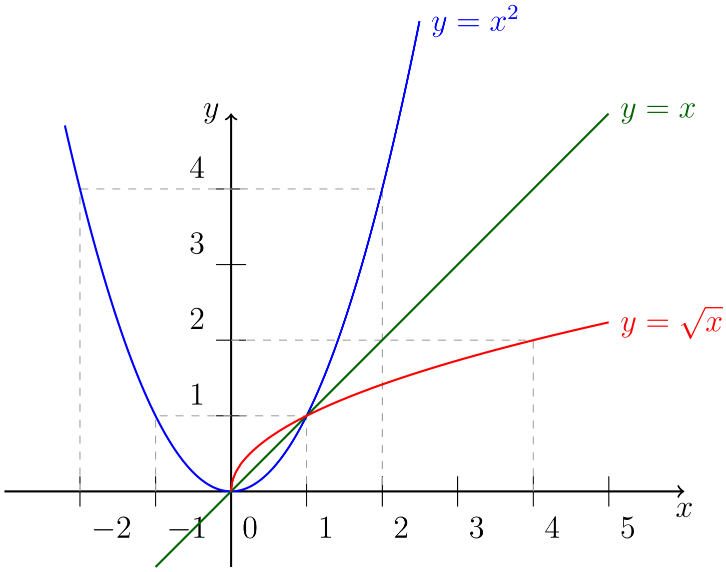
La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

L'étude de la fonction $x \longmapsto x - \sqrt{x}$ **définie sur** $\mathbb{R}^+$ permet d'établir la propriété :

Propriété 4

- Pour n'importe quel nombre réel $x \in [0;1]$: $\quad 0 \leqslant x^2 \leqslant x \leqslant \sqrt{x} \leqslant 1$.
- Pour n'importe quel nombre réel $x \in [1;+\infty[$: $\quad 1 \leqslant \sqrt{x} \leqslant x \leqslant x^2$.

Un dessin à retenir : positions relatives des courbes représentatives



4.3 La fonction « valeur absolue »

4.3.1 Définition

Définition 1 – *valeur absolue d'un nombre*

Pour n'importe quel nombre réel a, on note $|\,a\,|$ le nombre appelé *valeur absolue de a*, défini par :

$$|\,a\,| = \begin{cases} a & \text{si } a \text{ est un nombre positif ou nul,} \\ -a & \text{sinon (}c.\text{-}à\text{-}d.\text{ pour } a \text{ négatif).} \end{cases}$$

4.3.2 Propriétés

Propriété 5

1. Pour n'importe quel nombre réel x, on a : $|\,x\,| \geqslant 0$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $|-x| = |\,x\,|$.
3. $|\,x\,| = 0 \iff x = 0$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = |\,x\,|$.

☞ *Attention !*

Pour n'importe quel nombre réel *positif* x, on a : $\left(\sqrt{x}\right)^2 = |\,x\,|$.

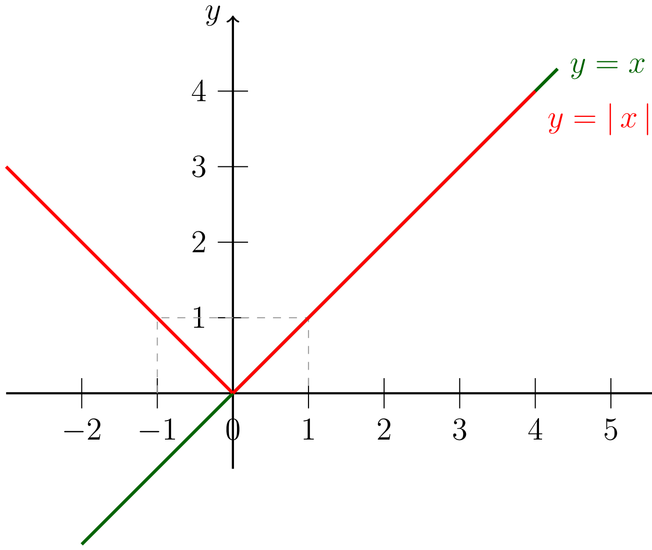
Cette propriété n'est vraie que pour les nombres positifs :

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 = \sqrt{x^2} \text{ si, et seulement si, } x \text{ est positif !}$$

On définit ensuite la fonction « valeur absolue » comme la fonction $x \longmapsto |\,x\,|$.

Propriété 6

1. La fonction $x \longmapsto |\,x\,|$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$.
2. La fonction $x \longmapsto |\,x\,|$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.



La représentation graphique de $x \longmapsto |\,x\,|$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (d'équation $x = 0$).

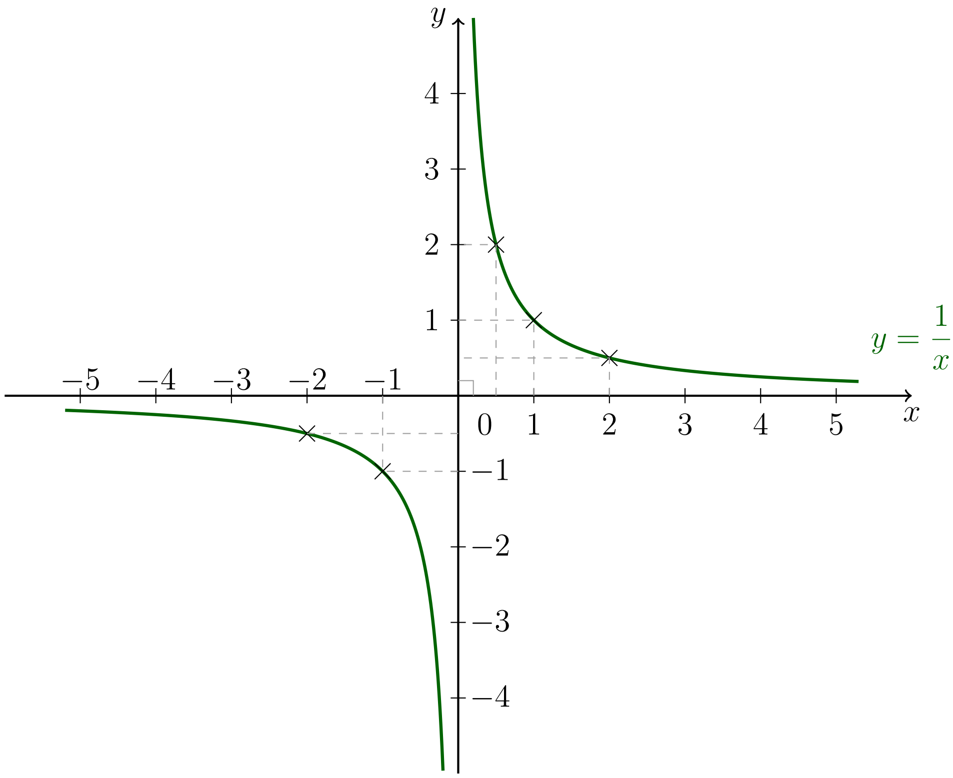
4.4 La fonction « inverse »

La fonction « inverse » est définie par :

$$\begin{array}{rcl}]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$

Propriété 7 – *variations*

1. La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$.
2. La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.



4.5 Variations des fonctions composées

Propriété 8 – *variations de $u + k$*

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.
u est une fonction définie sur I.
k est un nombre réel.

On définit la fonction :

$$f: \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & u(x) + k \end{array}$$

La fonction f possède le même sens de variation que la fonction u sur I.

Par commodité, la fonction f est notée $u + k$:

$$\forall x \in I, \ (u + k)(x) = u(x) + k \, .$$

Propriété 9 – *variations de $k\,u$*

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.
u est une fonction définie sur I.
k est un nombre réel.

$$g: \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & k \times u(x) \end{array}$$

- Si $k > 0$, alors les fonctions g et u possèdent le même sens de variation sur I.
- Si $k < 0$, alors g et u possèdent des sens de variation contraires sur I.

La fonction $x \longmapsto k \times u(x)$ est notée $k\,u$.

Propriété 10 – *variations de $\sqrt{u}$*

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.
u est une fonction définie sur I et *positive sur I* :

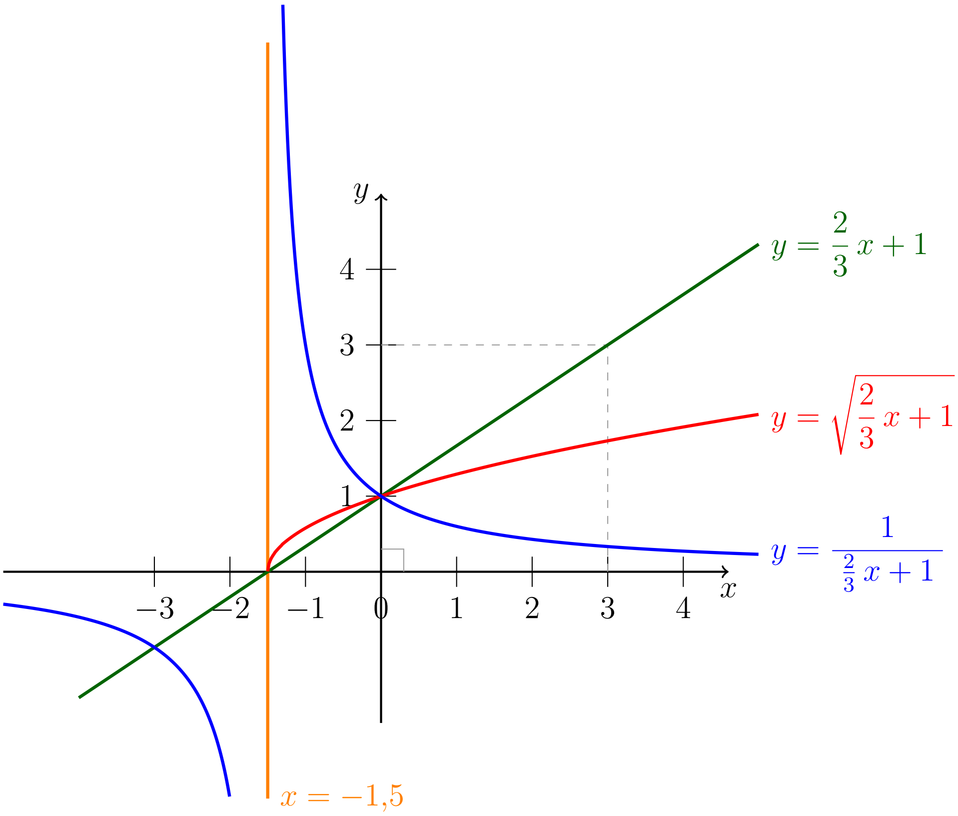
$$\forall x \in I, u(x) \geqslant 0 \, .$$

Les fonctions u et $x \longmapsto \sqrt{u(x)}$ possèdent le même sens de variation sur I.

Propriété 11 – *variations de $\dfrac{1}{u}$*

u est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
On suppose que *la fonction u ne s'annule pas sur I*.

Les fonctions u et $x \longmapsto \dfrac{1}{u(x)}$ ont des variations de sens contraires sur I.



4.6 Exercices

Exercice 1

Établir (éventuellement avec une tabulation sur la calculatrice) la liste des carrés des vingt-cinq premiers entiers naturels.

Exercice 2

Déduire de la liste précédente la liste des racines carrées des premiers carrés parfaits (un entier naturel n est un entier est un carré parfait lorsque $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$).

Exercice 3

Donner un encadrement de $\sqrt{200}$ par deux entiers naturels consécutifs.

Exercice 4

Donner sans calculatrice le nombre de chiffres de la partie entière du nombre $\sqrt{11905}$.

Exercice 5

Comparer sans calculatrice les nombres $2\sqrt{19}$ et $6\sqrt{2}$.

Exercice 6

Exprimer chacun des nombres A, B, C et D sans racine carrée au dénominateur :

$$A = \frac{1}{\sqrt{3} - 1}\ ; \quad B = \frac{5}{2 + 2\sqrt{3}}\ ; \quad C = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}\ ; \quad D = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}\ .$$

Exercice 7

Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x - \sqrt{x}$.

5 Dérivation (2/2)

5.1 Fonction dérivée

f désigne une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Définition 1 – *Fonction dérivée*

Lorsque, pour n'importe quel nombre a de I, le nombre dérivé de f existe en a, on dit que f est *dérivable* sur l'intervalle I.

Lorsque f est dérivable sur I, on appelle *fonction dérivée* de f la fonction notée f' :

$$f' : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$$

Exemple

Pour la fonction h :

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 3\,x^2 - 5\,x + 2 \end{array}$$

On démontre que h est dérivable partout sur $\mathbb{R}$.

La fonction h' est définie par :

$$h' : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 6\,x - 5 \end{array}$$

5.2 Fonctions dérivées des fonctions usuelles

Propriété 1

fonction	définie sur	dérivable sur	fonction dérivée
$f(x) = a\,x + b$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$
$f(x) = k$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2\,x$
$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = n\,x^{n-1}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0; +\infty[$	$]0; +\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

5.3 Fonctions dérivées et opérations

5.3.1 Fonction dérivée de la somme de deux fonctions

Propriété 2

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Alors la fonction $x \longmapsto u(x) + v(x)$ est définie et dérivable sur I, avec :

$$\forall x \in I, (u+v)'(x) = u'(x) + v'(x)$$

On écrit plus simplement :

$$(u+v)' = u' + v'$$

On peut démontrer la propriété analogue pour la différence :

$$(u-v)' = u' - v'$$

5.3.2 Fonction dérivée du produit par une constante

Propriété 3 – $k \times u$

La fonction u est définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, k est un nombre réel.

Alors la fonction $x \longmapsto k \times u(x)$ est définie et dérivable sur I, avec :

$$\forall x \in I, (k \times u)'(x) = k \times u'(x)$$

On écrit plus simplement :

$$(k\,u)' = k\,u'$$

Propriété 4

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Alors la fonction $x \longmapsto u(x) \times v(x)$ est définie et dérivable sur I, avec :

$$\forall x \in I, (u \times v)'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$$

On écrit plus simplement :

$$(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$$

5.3.3 Quotient et inverse

Propriété 5

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

On suppose de plus que v ne s'annule pas sur I.

Alors la fonction $x \longmapsto \dfrac{u(x)}{v(x)}$ est définie et dérivable sur I, avec :

$$\forall x \in I, \left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{\left(v(x)\right)^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

On en déduit la propriété pour la dérivée de la fonction inverse d'une fontion :

Propriété 6

Soit v une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

On suppose de plus que v ne s'annule pas sur I.

Alors la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{v(x)}$ est définie et dérivable sur I, avec :

$$\forall x \in I, \left(\frac{1}{v}\right)'(x) = \frac{-v'(x)}{\left(v(x)\right)^2}$$

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$$

5.4 Dérivation et variations

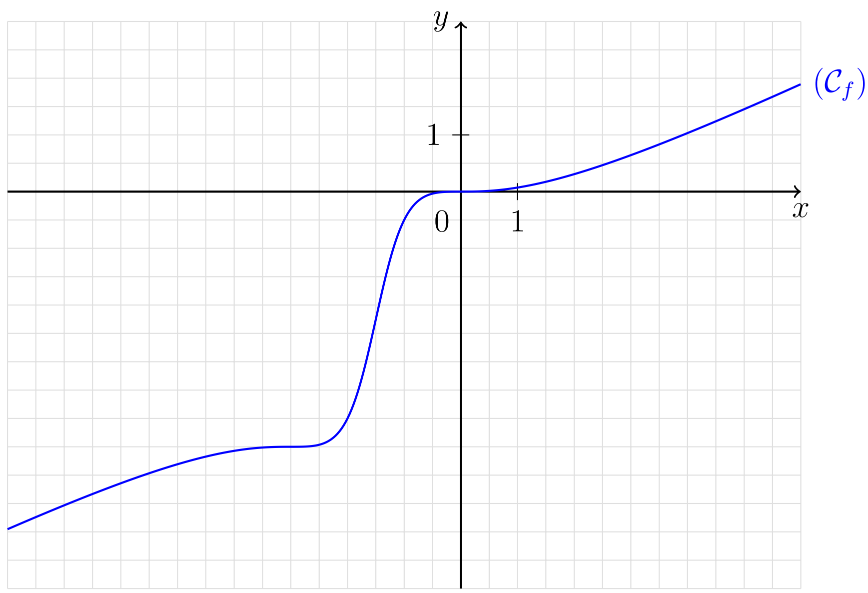
Propriété 7

f est une fonction dérivable sur un intervalle I.

Si f est strictement croissante sur I, alors :

$$\forall x \in I, f'(x) \geqslant 0\,.$$

Il existe une propriété analogue pour une fonction strictement décroissante sur un intervalle.



$$f : x \longmapsto \frac{x^3}{2\left(x^2+3x+3\right)}$$

Propriété 8 – *signe de la dérivée et monotonie*

f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

- Si, pour tout x de I, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I ;
- Si, pour tout x de I, $f'(x) > 0$ (sauf peut-être pour un nombre fini de valeurs de x pour lesquelles $f'(x) = 0$), alors f est strictement croissante sur I ;
- Si, pour tout x de I, $f'(x) < 0$ (sauf peut-être pour un nombre fini de valeurs de x pour lesquelles $f'(x) = 0$), alors f est strictement décroissante sur I.

6 Statistiques

6.1 Rappels

6.1.1 Caractère : valeur et effectif

On considère une série statistique à caractère numérique :

valeur du caractère	x_1	x_2	$\dots$	x_p
effectif	n_1	n_2	$\dots$	n_p

— La série possède p valeurs distinctes du caractère.

— En pratique, on organise le tableau en classant les valeurs x_i par ordre croissant :

$$x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_p$$

6.1.2 Effectif, effectif total

Définition 1 – *effectif, effectif total*

— Le nombre noté n_i est appelé effectif de la valeur x_i.

— La somme des effectifs de toutes les valeurs du caractère est appelée effectif total de la série.

En notant N l'effectif total : $N = n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_p$.

6.1.3 Fréquence

Définition 2 – *fréquence d'un caractère*

On appelle fréquence de la valeur x_i, notée f_i, le quotient de l'effectif de la valeur x_i par l'effectif total :

$$f_i = \frac{n_i}{n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_p}$$

— La fréquence d'une valeur du caractère est un nombre de l'intervalle $[\,0\,;\,1\,]$.

— On peut exprimer la fréquence d'une valeur en pourcentage.

6.1.4 Effectif cumulé croissant

Définition 3 – ***effectif cumulé croissant***

L'effectif cumulé croissant de la valeur x_i est la somme des effectifs pour toutes les valeurs du caractère inférieures ou égales à x_i :

$$n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_i$$

6.1.5 Fréquence cumulée croissante

Définition 4 – ***fréquence cumulée croissante***

De manière analogue, on définit la fréquence cumulée croissante comme la somme des fréquences des valeurs du caractère inférieures ou égales à x_i :

$$f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_i$$

Propriété 1

La fréquence cumulée croissante du caractère x_i est égale au quotient de l'effectif cumulé croissant de la valeur x_i par l'effectif total :

$$\frac{n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_i}{n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_p}$$

6.1.6 Moyenne

Définition 5 – *moyenne*

La moyenne de la série statistique, notée $\bar{x}$, est le nombre défini par :

$$\bar{x} = \frac{n_1 \times x_1 + n_2 \times x_2 + \cdots + n_p \times x_p}{n_1 + n_2 + \cdots + n_p}$$

La moyenne est un indicateur de position.

6.1.7 La notation Σ

La formule précédente s'écrit avec la notation « somme » :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i \times x_i}{\sum_{i=1}^{p} n_i}$$

La lettre majuscule « Σ » (on lit « sigma ») est la lettre S de l'alphabet grec.

La formule peut s'écrire aussi :

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{p} n_i \times x_i$$

Propriété 2

On a l'égalité :

$$\bar{x} = f_1 \times x_1 + f_2 \times x_2 + \cdots + f_p \times x_p$$

Cette propriété permet donc de calculer la moyenne d'une série statistique à l'aide des fréquences.

Remarque :

La définition précédente de la moyenne concerne les séries à *caractère discret*, dont les valeurs sont isolées (*c.-à-d.* peu nombreuses).

Cette définition s'applique aussi aux séries à *caractère continu* : dans ce cas, les valeurs sont regroupées en *classes*, et on applique la formule en prenant pour valeur du caractère le *centre* de chaque classe.

6.1.8 Médianes et quartiles

Définition 6 – *médiane*

Une médiane d'une série statistique est un nombre noté M_e, pour lequel :

- au moins 50 % des valeurs sont inférieures à M_e ;
- au moins 50 % des valeurs sont supérieures à M_e.

La médiane est un indicateur de position.

Définition 7 – *quartiles Q_1 et Q_3*

- Le 1er quartile Q_1 est la plus petite valeur du caractère, pour laquelle au moins $25\ \%$ des valeurs sont inférieures à Q_1.
- Le 3e quartile Q_3 est la plus petite valeur du caractère, pour laquelle au moins $75\ \%$ des valeurs sont inférieures à Q_3.

Les quartiles sont des indicateurs de dispersion.

En pratique, on fait la convention suivante :

- Pour un effectif total impair, on prend comme médiane la valeur « centrale » du caractère.
- Pour un effectif total pair, on peut prendre comme médiane la demi-somme des deux valeurs « centrales ».

Pour compléter l'étude d'une série statistique, on observe deux autres indicateurs de dispersion :

Définition 8 – *étendue*

L'*étendue* est la différence $x_p - x_1$.

Définition 9 – *écart interquartile*

- L'*écart interquartile* est la différence $Q_3 - Q_1$.
- L'intervalle $[\,Q_1\,;\,Q_3\,]$ est appelé *intervalle interquartile*.

6.2 Diagramme en boîte

Un *diagramme en boîte* (on dit aussi une « boîte à moustaches ») est un graphique résumant une série statistique.

Ce graphique comporte plusieurs informations concernant la série :

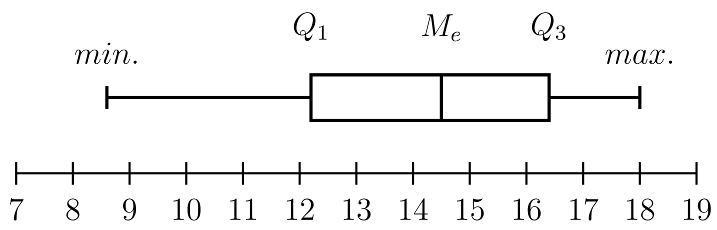
— les valeurs minimale et maximale du caractère ;

— la médiane ;

— les quartiles ;

— une « boîte » (un rectangle) faisant apparaître l'écart interquartile.

Un exemple de diagramme en boîte



6.3 Variance et écart-type

On considère une série statistique à caractère quantitatif :

valeur	x_1	x_2	...	x_p
effectif	n_1	n_2	...	n_p

Définition 10 – *variance*

On appelle *variance* le nombre V défini par :

$$V = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{p} n_i \left(x_i - \bar{x}\right)^2$$

(on rappelle que le nombre $\bar{x}$ désigne la moyenne de la série)

Définition 11 – *écart-type*

On appelle *écart-type* le nombre $\sigma = \sqrt{V}$.

(où la lettre V désigne la variance de la série)

Propriété 3

Avec les notations précédentes, l'écart-type vérifie l'égalité :

$$V = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{p} n_i \times x_i^2\right) - (\bar{x})^2$$

6.4 Indicateurs d'une série statistique

Les indicateurs de position et de dispersion permettent l'interprétation d'une série statistique :

— l'intervalle $[\,Q_1\,;\,Q_3\,]$ contient 50 % des valeurs du caractère de la série ;

— l'écart interquartile $Q_3 - Q_1$ mesure la dispersion autour de la médiane M_e ;

— la médiane M_e partage la série en deux sous-séries de même effectif (les valeurs étant ordonnées par ordre croissant) ;

— l'écart-type σ mesure la dispersion autour de la moyenne $\bar{x}$.

7 Suites (1/2)

7.1 Définition et notations

Définition 1

Une *suite numérique* u est une fonction définie sur $\mathbb{N}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$u: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u(n) \end{array}$$

Remarque : une suite peut être définie seulement à partir d'un certain nombre entier naturel (et non à partir de l'indice 0 ou 1) :

Par exemple, la suite $v : n \longmapsto \sqrt{n-2}$ n'est définie que pour $n \geqslant 2$.

On utilise des notations spéciales pour les suites (on « numérote » les images) :

— pour l'image de l'entier n par u, on emploie la *notation avec indice* :

$$u_n = u(n)$$

— pour la suite u elle-même, on note :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n)_{n\geqslant 0}$$

ou encore :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n)$$

Pour l'exemple précédent, on note : $(u_n)_{n\geqslant 2}$.

Définition 2 – ***suite définie par récurrence***

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et a est un nombre réel.

On peut définir une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

On dit alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *définie par récurrence*.

7.2 Suites arithmétiques

Définition 3

a et b sont deux nombres réels.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = u_n + b \end{cases}$$

est appelée *suite arithmétique* de *premier terme* a et de *raison* b.

Propriété 1 – ***terme général d'une suite arithmétique***

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_n = u_0 + n \times r\,.$$

ATTENTION

Il faut veiller au rang du premier terme d'une suite géométrique : en effet la formule précédente est FAUSSE si la suite n'est pas définie à partir du rang 0 mais 1 (par exemple) ! Dans ce cas (et seulement ce cas), la bonne formule devient :

Si $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite arithmétique de raison r, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_n = u_1 + (n-1) \times r\,.$$

Propriété 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique si, et seulement si, il existe un nombre réel λ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} - u_n = \lambda\,.$$

Dans ce cas, λ est la raison de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Propriété 3

Pour n'importe quel nombre entier naturel non nul n :

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n\,(n+1)}{2}.$$

La propriété précédente n'est rien d'autre que la somme des n premiers termes de la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 1.

7.3 Suites géométriques

Définition 4

a et b sont deux nombres réels.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = b \times u_n \end{cases}$$

est appelée *suite géométrique* de *premier terme* a et de *raison* b.

Propriété 4 – ***terme général d'une suite géométrique***

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_n = u_0 \times q^n\,.$$

Propriété 5

Pour n'importe quel nombre entier naturel non nul n et pour n'importe quel réel q différent de 1 :

$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Les remarques précédentes concernant les suites arithmétiques (rang du premier terme non nul et formule clause, somme des premiers termes) restent valables pour les suites géométriques !

7.4 Suites arithmético-géométriques

Définition 5

a, b et k sont trois nombres réels.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = k \\ \forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = a \times u_n + b \end{cases}$$

est appelée *suite arithmético-géométrique*.

8 Suites (2/2)

8.1 Variations d'une suite

Définition 1 – ***suite croissante***

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir du rang $n_0 \in \mathbb{N}$ lorsque :

Pour tout nombre entier naturel n, si $n \geqslant n_0$, alors $u_{n+1} \geqslant u_n$.

Propriété 1

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir de n_0 :

Pour tout nombre entier naturel n, si $n \geqslant n_0$, alors $u_n \geqslant u_{n_0}$.

Cette propriété est une conséquence de la définition précédente.

On dispose des propriétés analogues pour les suites *décroissantes*.

Définition 2 – ***suite décroissante***

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir du rang $n_0 \in \mathbb{N}$ lorsque :

$$\forall n \in \mathbb{N},\, n \geqslant n_0,\, u_{n+1} \leqslant u_n$$

Propriété 2

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir de n_0 :

Pour tout nombre entier naturel n, si $n \geqslant n_0$, alors $u_n \leqslant u_{n_0}$.

Définition 3 – ***suite monotone***

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante ou décroissante est une suite *monotone*.

Remarque :

Une suite peut tout à fait être ni croissante, ni décroissante.

Définition 4 – ***suite majorée, suite minorée, suite bornée***

- On dit qu'une suite u est *majorée* par un réel M si, pour tout entier n, $u_n \leqslant M$.
- On dit qu'une suite u est *minorée* par un réel m si, pour tout entier n, $u_n \geqslant m$.
- On dit qu'une suite majorée et minorée est une suite *bornée*.

8.2 Variations d'une suite arithmétique

Propriété 3 – ***variations d'une suite arithmétique***

1. Une suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison r est croissante si, et seulement si, r est un réel *strictement positif*.
2. Une suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison r est décroissante si, et seulement si, r est un réel *strictement négatif*.

8.3 Variations d'une suite géométrique positive

On rappelle que le terme général d'une suite géométrique u de premier terme u_0 et de raison q est, pour tout entier naturel n :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

On en déduit que le signe du terme général dépend des signes des nombres u_0, q et de la parité du nombre entier n :

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">signe de u_n</td><td colspan="2">signe de u_0</td></tr>
<tr><td>positif</td><td>négatif</td></tr>
<tr><td rowspan="3">signe de q</td><td>positif</td><td>u_n est</td><td>u_n est</td></tr>
<tr><td rowspan="2">négatif</td><td>n pair : u_n est</td><td>n pair : u_n est</td></tr>
<tr><td>n impair : u_n est</td><td>n impair : u_n est</td></tr>
</table>

Propriété 4 – ***variations d'une suite géométrique positive***

q désigne un nombre réel *positif* :

- la suite géométrique $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si $q > 1$;
- la suite géométrique $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante si $0 < q < 1$.

Remarques :

1. Pour $q = 1$, la suite est constante ;
2. Le signe du quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ (égal à la raison pour une suite géométrique) peut varier selon la parité de n (comme rappelé ci-dessus).
3. Pour une suite géométrique de raison q positive et de premier terme u_0 *négatif*, on a :
   - tous les termes sont négatifs ;
   - la suite géométrique $(u_0\, q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante si $0 < q < 1$;
   - la suite géométrique $(u_0\, q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante si $q > 1$.

8.4 Limite d'une suite

Définition 5 – *suite de limite* 0

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite.

Quand, pour n'importe quel nombre réel positif a, aussi petit que l'on veut, on peut déterminer un certain nombre entier naturel n_0 pour lequel on a :

$$\text{si } n \geqslant n_0 \text{ , alors } |u_n| \leqslant a$$

On dit alors que *la suite u tend vers 0* et on écrit :

$$\lim_{n\mapsto+\infty} u_n = 0$$

Définition 6 – *suite de limite* $+\infty$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite.

Quand, pour n'importe quel nombre réel positif A, on peut déterminer un certain nombre entier naturel n_0 pour lequel on a :

$$\text{si } n \geqslant n_0 \text{ , alors } \ u_n \geqslant A$$

On dit alors que *la suite u tend vers l'infini* (l'infini positif est noté $+\infty$) et on écrit :

$$\lim_{n\mapsto+\infty} u_n = +\infty$$

9 Produit scalaire

Mise en garde

Dans l'ensemble du chapitre, les angles (de vecteurs) sont mesurés en radians.

9.1 Définition

Définition 1 – *produit scalaire de deux vecteurs*

On considère deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ représentés respectivement par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

On appelle *produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$* le nombre réel noté $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ défini par :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= AB \times AC \times \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\end{aligned}$$

Attention !

Un produit *scalaire* est un nombre réel!!!

En particulier :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= AB \times AB \times \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}\right) \\ &= AB \times AB \times \cos(0) \\ &= AB^2\end{aligned}$$

On pose comme notation : $\overrightarrow{u}^2 = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}$.

Propriété 1

A, B et C sont trois points *alignés*.

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \geqslant 0$ si, et seulement si, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont de même sens ;
2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \leqslant 0$ si, et seulement si, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont de sens contraires.

Propriété 2

A, B et C sont trois points ; on note H le point projeté orthogonal du point C sur la droite (AB). Alors :

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$ si $H \in [AB]$;
2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$ si $H \in (AB) \setminus [AB]$.

Dans les deux cas :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$$

9.2 Vecteurs orthogonaux

Définition 2 – ***vecteurs orthogonaux***

On dit que deux vecteurs non nuls sont *orthogonaux* lorsque leurs directions sont perpendiculaires.

Propriété 3

Dans un repère orthonormé (O, I, J), on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$.

Alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = a \times a' + b \times b'$$

Propriété 4

Avec les notations précédentes, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si :

$$a \times a' + b \times b' = 0$$

Définition 3 – ***vecteur normal à une droite***

On dit qu'un vecteur non nul est *normal* à une droite (d) lorsqu'il est orthogonal à au moins un vecteur directeur de (d).

Propriété 5

$A \in (d)$ et $\vec{n}$ un vecteur normal de (d).

La droite (d) est l'ensemble $\left\{M \in \mathcal{P} / \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0\right\}$.

Propriété 6

Dans un repère du plan, si une droite (d) a pour équation $a\,x + b\,y + c = 0$, alors le vecteur $\vec{n}\ (a\,;\,b)$ est un vecteur normal de (d).

9.3 Norme et produit scalaire

Dans un repère orthonormé, on considère le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

On a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} &= a \times a + b \times b \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

Définition 4 – *norme d'un vecteur*

On appelle *norme* du vecteur $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, le nombre positif :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Propriété 7

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$

9.4 Propriétés

Propriété 8

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs, k est un réel.

1. $\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v}$;
2. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$;
3. $(k\,\vec{u}) \cdot \vec{v} = k\,(\vec{u} \cdot \vec{v})$.

On en déduit les « identités remarquables » pour les carrés de la somme vectorielle, de la différence vectorielle et du produit scalaire « somme vectorielle – différence vectorielle ».

10 Probabilités

10.1 Variables aléatoires

Définition 1 – *Variable aléatoire discrète*

Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$ l'univers fini d'une expérience aléatoire.

On appelle *variable aléatoire* une fonction définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si x est un réel, l'événement « X prend la valeur x » est noté : $\{X = x\}$.

Cet événement est constitué de toutes les issues de Ω qui ont pour image x.

10.1.1 Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition 2 – *Loi de probabilité*

On considère une variable aléatoire X prenant les valeurs $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Lorsqu'on associe à chaque valeur x_i la probabilité de l'événement $\{X = x_i\}$, on dit qu'on définit la *loi de probabilité* de X.

En pratique, pour définir la loi de probabilité d'une expérience aléatoire,

1. on détermine toutes les valeurs possibles $x_1, x_2, \dots, x_n$ prises par X ;
2. on calcule les probabilités $p_1, p_2, \dots, p_n$ d'obtenir les valeurs correspondantes ;
3. on rassemble ces informations dans un tableau :

Valeur prise par X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

On a donc la propriété :

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

c.-à-d. :

$$p(X = x_1) + p(X = x_2) + \dots + p(X = x_n) = 1$$

10.1.2 Espérance d'une variable aléatoire

Définition 3 – *Espérance mathématique*

On appelle *espérance mathématique* de la variable aléatoire X le nombre noté $\mathrm{E}(X)$ défini par :

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} p\left(X = x_i\right) \times x_i$$

L'espérance mathématique correspond à la valeur moyenne que prendrait la variable aléatoire X pour un très grand nombre de réalisations de l'expérience aléatoire.

10.1.3 Variance et écart-type d'une variable aléatoire

Définition 4 – *Variance*

On appelle *variance* de la variable aléatoire X le nombre noté $\mathrm{V}(X)$ défini par :

$$\mathrm{V}(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \times \left(x_i - \mathrm{E}(X)\right)^2$$

Définition 5 – *Écart-type*

On appelle *écart-type* de la variable aléatoire X le nombre noté $\sigma(X)$ défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{V}(X)}$$

10.1.4 Propriétés

Propriété 1

X est une variable aléatoire.

a et b sont deux nombres réels.

1. Propriété de l'espérance mathématique :

$$\mathrm{E}(a\,X + b) = a\,\mathrm{E}(X) + b$$

2. Propriété de la variance :

$$\mathrm{V}(a\,X) = a^2\,\mathrm{V}(X)$$

10.2 Loi binomiale

10.3 Expérience de Bernouilli

On s'intéresse à une expérience aléatoire, ayant seulement deux issues :

— une issue est nommée « succès » et notée S ;

— l'autre issue est nommée « échec » et notée $\overline{S}$.

Définition 6 – ***Épreuve de Bernouilli***

Une expérience aléatoire, ayant seulement deux issues, est appelée *épreuve de Bernouilli*.

On note p la probabilité de succès : $p \in [0; 1]$.

On dit que la variable aléatoire qui prend la valeur 1 (et prend la valeur 0 sinon) *suit la loi de Bernouilli de paramètre p*.

k	1	0
$P(X = k)$	p	$1 - p$

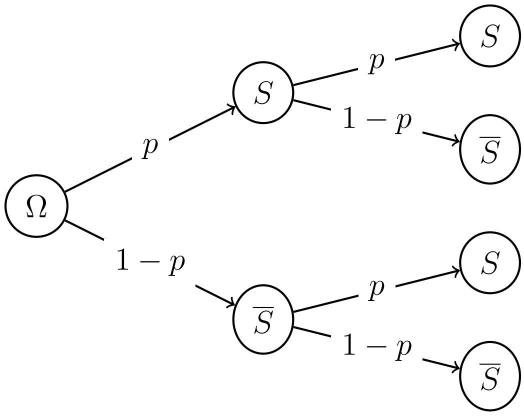
Propriété 2

Pour une épreuve de Bernouilli de paramètre p, on a :

$$\mathrm{E}(X) = p\,; \quad \mathrm{V}(X) = p\,(1-p)\;; \quad \sigma(X) = \sqrt{p\,(1-p)}$$

10.4 Répétition d'expériences de Bernouilli

Une expérience de Bernouilli est souvent répétée plusieurs fois dans des conditions identiques : on peut alors représenter cette expérience par un *arbre* appelé *schéma de Bernouilli* :



Définition 7 – *Loi binomiale de paramètres n et p*

On répète n fois une épreuve de Bernouilli de paramètre p.

On dit que la variable aléatoire X égale au nombre de succès lors des n expériences *suit la loi binomiale de paramètres n et p*.

On note :

$$X \sim \mathcal{B}(\,n\,;\,p\,)$$

Propriété 3

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$.

Pour tout $k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$, on a :

$$P(X = k) = \binom{n}{k}\, p^k\, (1-p)^{n-k}$$

La propriété ci-dessus utilise la notation « k parmi n » (cf. chapitre suivant) :

Définition 8 – *Notation k parmi n*

Pour tout entier $k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$, on note $\binom{n}{k}$ le nombre égal au nombre de manières d'obtenir k succès au cours de n épreuves de Bernouilli.

Propriété 4

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(\,n\,;\,p\,)$.

$$\mathrm{E}(X) = n\,p\,; \quad \mathrm{V}(X) = n\,p\,(1-p)\;; \quad \sigma(X) = \sqrt{n\,p\,(1-p)}$$

11 Coefficients binomiaux

On considère une expérience aléatoire à deux issues (« succès » et « échec »), renouvelée plusieurs fois dans les mêmes conditions.

11.1 Définition

Définition 1 – *Coefficient binomial*

n et k sont deux entiers naturels, avec $k \leqslant n$.

On nomme *coefficient binomial k parmi n* le nombre noté $\binom{n}{k}$, défini comme le nombre de fois où l'on obtient k succès lors des n expériences.

11.2 Propriétés

Propriété 1

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{0} = 1$ et $\binom{n}{n} = 1$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant k \leqslant n$, $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$.

On fait la convention : $\binom{0}{0} = 1$.

Propriété 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant k \leqslant n$, on a :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Cette propriété est l'origine des deux représentations suivantes, très utiles pour le calcul « à la main » des coefficients binomiaux.

11.2.1 Représentations visuelles des propriétés des coeff. binomiaux

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0}=1 & & & & \\
 & & & \binom{1}{0}=1 & & \binom{1}{1}=1 & & & \\
 & & \binom{2}{0}=1 & & \binom{2}{1}=2 & & \binom{2}{2}=1 & & \\
 & \binom{3}{0}=1 & & \binom{3}{1}=3 & & \binom{3}{2}=3 & & \binom{3}{3}=1 & \\
\binom{4}{0}=1 & & \binom{4}{1}=4 & & \binom{4}{2}=6 & & \binom{4}{3}=4 & & \binom{4}{4}=1
\end{array}
$$

Ce qui donne plus simplement :

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

11.2.2 Le triangle de Pascal

rang 0	1								
rang 1	1	1							
rang 2	1	2	1						
rang 3	1								
rang 4	1								
rang 5	1								

12 Trigonométrie

12.1 Rappel : le radian

Dans l'ensemble du chapitre, le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I,J).

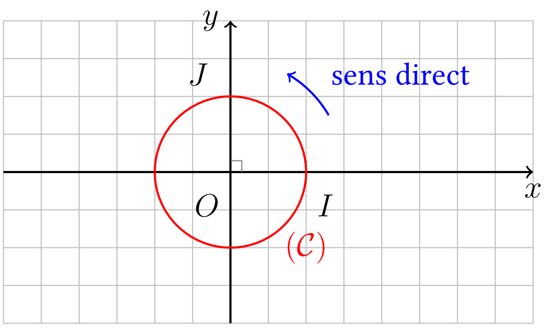
Définition 1 – *cercle trigonométrique*

Pour la mesure des angles en *radians*, on considère le *cercle trigonométrique* $(\mathcal{C})$:

— de centre O (l'origine du repère) ;

— de rayon 1 ;

— on appelle *sens direct* le sens de I vers J sur le petit arc $\overset{\frown}{IJ}$; le sens *indirect* est le sens opposé.



Définition 2 – *le radian*

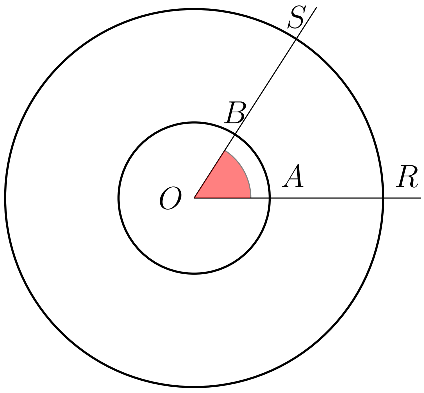
On définit 1 *radian* comme la mesure de l'angle au centre déterminé par un petit arc (de cercle) dont la longueur est égale au rayon du cercle.

On en déduit la correspondance (fondamentale) entre la mesure en degrés et la mesure en radians :

$$\boxed{360° \text{ et } 2\,\pi \text{ rad sont deux mesures de l'angle plein.}}$$

On rappelle la proportionnalité des deux unités de mesure degré et radian :

angle (degrés)	360	180	90	45	30	...
angle (radians)	$2\,\pi$					

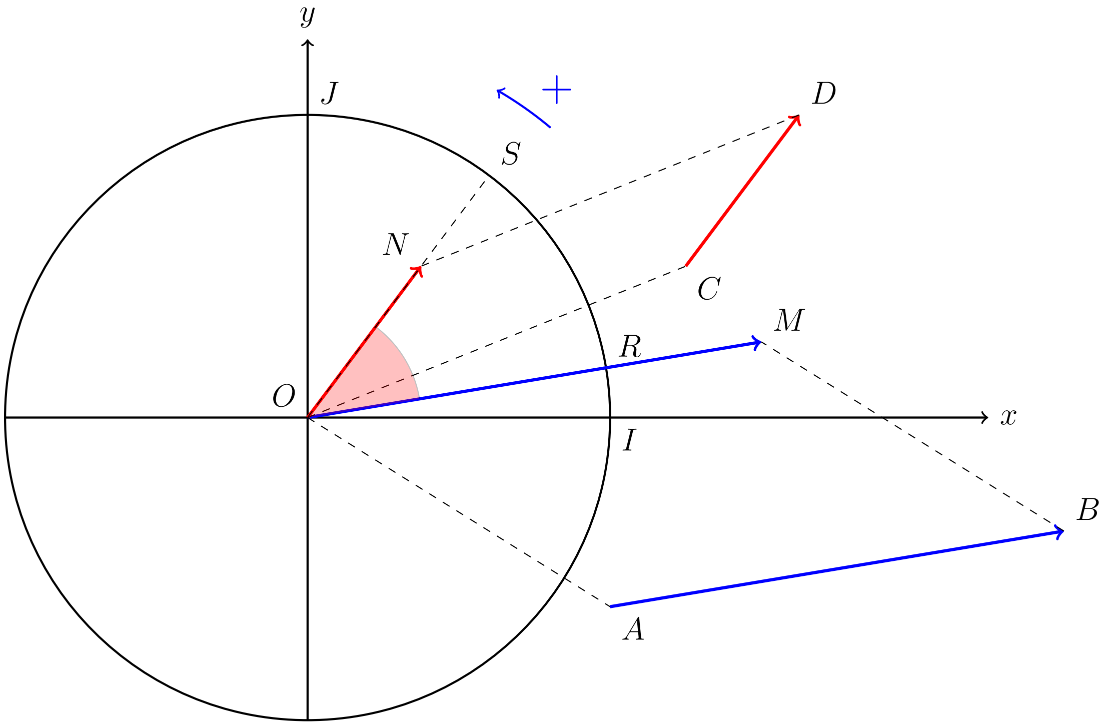


Sur la figure ci-dessus, la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ est égale au rayon OA : l'angle $\widehat{AOB}$ mesure 1 rad.

Pour la même raison, l'angle $\widehat{ROS}$ mesure 1 rad.

12.2 Angles orientés de vecteurs

On considère deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ comme ci-dessous :



Par construction, il vient :

- pour le parallélogramme $ABMO$: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$;
- les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OR}$ sont colinéaires et R appartient au cercle trigonométrique ;
- pour le parallélogramme $CDNO$: $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{ON}$;
- les vecteurs $\overrightarrow{ON}$ et $\overrightarrow{OS}$ sont colinéaires et S appartient au cercle trigonométrique.

Définition 3 – *notation*

L'*angle orienté de vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BN}$* est noté $\left(\widehat{\overrightarrow{AM}\,,\overrightarrow{BN}}\right)$ ou $\left(\overrightarrow{AM}\,,\overrightarrow{BN}\right)$.

L'*angle orienté de vecteurs $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{AM}$* est noté $\left(\widehat{\overrightarrow{BN}\,,\overrightarrow{AM}}\right)$ ou $\left(\overrightarrow{BN}\,,\overrightarrow{AM}\right)$.

ATTENTION !!!

Il faut être attentif à l'ordre des vecteurs dans la notation : les deux angles $\left(\overrightarrow{AM}\,,\overrightarrow{BN}\right)$ et $\left(\overrightarrow{BN}\,,\overrightarrow{AM}\right)$ sont des angles de vecteurs *de sens opposés* !

Définition 4 – *mesures d'un angle orienté de vecteurs unitaires*

Soient R et S deux points du cercle trigonométrique.

Une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OR}\,,\overrightarrow{OS}\right)$ est égale à la longueur de n'importe quel arc (du cercle trigonométrique) d'extrémités R et S, dans le sens de R vers S.

ATTENTION !!!

- N'importe quel angle orienté de vecteurs possède donc une infinité de mesures, « à un ou plusieurs tours près ».
- On confond par convention la notation d'un angle orienté de vecteurs avec n'importe laquelle de ses mesures : un angle de vecteurs possède plusieurs mesures (toujours exprimées en radians).

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{CD}\right) &= \left(\overrightarrow{OM}\,,\overrightarrow{ON}\right)\\ \left(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{CD}\right) &= \left(\overrightarrow{OR}\,,\overrightarrow{OS}\right)\end{aligned}$$

On écrira par exemple : $\left(\overrightarrow{OH}\,,\overrightarrow{OT}\right) = \dfrac{\pi}{6}$.

Dans ce cas, $\dfrac{121\,\pi}{6}$ est une autre mesure de $\left(\overrightarrow{OH}\,,\overrightarrow{OT}\right)$; en effet : $\dfrac{\pi}{6} + 20\,\pi = \dfrac{121\,\pi}{6}$.

12.2.1 Mesure principale d'un angle orienté de vecteurs

Définition 5 – *mesure principale d'un angle orienté*

Parmi toutes les mesures en radians d'un angle orienté de vecteurs, on appelle *mesure principale* de l'angle orienté des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ l'unique mesure qui appartient à l'intervalle $]-\pi;\ \pi]$.

Propriété 1

Si on note α le nombre réel mesure principale d'un angle orienté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, alors les autres mesures de $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ sont de la forme $\alpha + k \times 2\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.

Algorithme de calcul de la mesure principale

Données :
  x une mesure de $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ en radians
Résultat :
  m mesure principale de $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ en radians
début
  $x \longrightarrow m$
  si $m \geqslant 0$ **alors**
    tant que $m > \pi$ **faire**
      $m - 2\pi \longrightarrow m$
    fin tq
  sinon
    tant que $m \leqslant -\pi$ **faire**
      $m + 2\pi \longrightarrow m$
    fin tq
  fin si
  afficher m
fin

12.3 Relations trigonométriques

Définition 6 – ***cosinus et sinus d'un nombre réel***

Soit x un nombre réel et le point M son image sur le cercle trigonométrique « par enroulement de la droite réelle ».

On appelle *cosinus de x* l'abscisse de M et *sinus de x* l'ordonnée de M.

Propriété 2

Pour n'importe quel réel x, on a : $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$.

Pour n'importe quel réel x, on a : $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$.

Pour n'importe quel réel x, on a : $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$.

Notation : on écrit aussi $(\cos x)^2 = \cos^2 x$.

Définition 7 – ***cosinus et sinus d'un angle orienté***

On appelle *cosinus* et *sinus* d'un angle orienté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ le cosinus et le sinus de n'importe laquelle des mesures (en radians) de $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Propriété 3

Pour n'importe quel réel x, on a : $\cos(-x) = \cos(x)$.

Pour n'importe quel réel x, on a : $\sin(-x) = -\sin(x)$.

Propriété 4

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z},\ \cos(x + k \times 2\,\pi) = \cos(x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z},\ \sin(x + k \times 2\,\pi) = \sin(x)$$

Propriété 5

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(\pi + x) = -\cos(x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(\pi + x) = -\sin(x)$$

Propriété 6

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(\pi - x) = -\cos(x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(\pi - x) = \sin(x)$$

Propriété 7

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$$

Propriété 8

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$$

Propriété 9 – ***formules d'addition***

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ \cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ \sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

Propriété 10 – ***formules de soustraction***

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ \cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ \sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$$

Propriété 11 – ***formules de duplication***

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(2\,x) = 1 - 2\,\sin^2(x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(2\,x) = 2\,\sin(x)\,\cos(x)$$