Pascal CHAUVIN

Lycée François TRUFFAUT – Challans

MATHÉMATIQUES

1ère STMG

Paternité

Pas d'utilisation commerciale

Partage des conditions initiales à l'identique

Licence Creative Commons 2.0 France

16 mars 2021

Table des matières

Publication sous licence Creative Commons 16 mars 2021 – Pascal CHAUVIN

Chapitre 1

Proportions et évolutions

1 Pourcentages d'une quantité

Définition 1 – pourcentage d'une quantité

t est un nombre réel.
« Prendre t % d'une valeur » consiste à multiplier cette valeur par $\dfrac{t}{100}$.

Exemple 1

La France possède une superficie de 10 950 000 km^2. Les dix parcs nationaux français représentent 0,5 % du territoire.

Quelle est la superficie totale des dix parcs ?

2 Proportion d'une sous-population (dans une population)

Définition 2 – proportion d'une sous-population

La proportion p d'une sous-population A, d'effectif n_A, dans une population E, d'effectif n_E, est le quotient des effectifs :

$$p = \frac{n_A}{n_E}$$

Attention : une proportion est un nombre toujours compris entre 0 et 1.

Exemple 2

Dans une classe de 28 élèves, 12 élèves portent un pull noir : quelle proportion les élèves au pull noir représentent-ils ?

Exercice 1

1. On donne $n_A = 234$ et $p = 0{,}65$. Calculer n_E.
2. On donne $p = 0{,}42$ et $n_E = 2347$. Calculer n_A.

3 Relation avec les pourcentages

Un pourcentage d'une quantité est une proportion dont la population est ramenée à 100.

Déterminer un pourcentage d'une quantité, c'est donc déterminer la proportion d'une sous-population dans une population ramenée à 100.

Exemple 3

Dans une volière de 567 oiseaux, on dénombre 134 aras bleus : quel pourcentage les aras représentent-ils ?

4 Intersection et union

Définition 3 – intersection

A et B sont deux ensembles (sous-populations d'une population).

L'intersection des ensembles A et B est l'ensemble des éléments présents à la fois dans A et dans B.

On écrit : $A \cap B$.

Définition 4 – union

A et B sont deux ensembles.

L'union des ensembles A et B est l'ensemble des éléments présents dans A ou dans B (ou les deux).

On écrit : $A \cup B$.

Exemple 4

On considère $A = \{2\,;3\,;4\,;5\}$ et $B = \{5\,;4\,;6\,;8\,;7\}$.

Déterminer l'intersection puis l'union de A et de B.

Exemple 5

Mêmes questions avec $A = \{2\,;3\,;4\}$ et $B = \{5\,;6\,;7\}$.

Exercice 2

Un centre équestre compte 28 cavaliers. Quinze d'entre eux font du dressage et 24 font du saut. Tous sauf deux d'entre eux pratiquent au moins une des deux disciplines.

Combien de cavaliers font :

1. uniquement du dressage ?
2. uniquement du saut ?
3. les deux ?

Publication sous licence Creative Commons 16 mars 2021 – Pascal CHAUVIN

Propriété 1

Aet B sont deux sous-populations d'une population E.

$$n_{A\cup B} = n_A + n_B - n_{A\cap B}$$

et

$$p_{A\cup B} = p_A + p_B - p_{A\cap B}$$

Remarques :

— Si $A \cap B = \varnothing$, alors $n_{A\cup B} = n_A + n_B$.

— Lorsque $A \cap B = \varnothing$ et $A \cup B = E$, on dit que A et B forment une partition de E.

Exercice 3

Dans l'immeuble de Bill, il y a 27 appartements avec des chiens, 33 avec des chats et 17 qui ont les deux. De plus, 35 appartements ne possèdent ni l'un ni l'autre.

1. Déterminer le nombre d'appartements dans l'immeuble.
2. Déterminer la proportion de chiens et de chats.

Publication sous licence Creative Commons 16 mars 2021 – Pascal CHAUVIN

5 Inclusion

Définition 5 – inclusion

Un ensemble A est inclus dans un ensemble B lorsque tous les éléments de A sont aussi des éléments de B.

On écrit : $A \subset B$.

Exemple 6

On donne $A = \{2\,;3\,;1\}$ et $B = \{1\,;0\,;2\,;3\,;4\}$.

A est-il inclus dans B ?

Propriété 2 – proportion de proportion

A, B et C sont trois populations telles que $A \subset B \subset C$.
On note p la proportion de A dans C, p' la proportion de A dans B, et p'' la proportion de B dans C. Alors :

$$p = p' \times p''.$$

Exemple 7

Une classe comporte 30 % de garçons. 60 % des garçons ont 17 ans. Quelle est la proportion de garçons âgés de 17 ans dans la classe ?

Exercice 4

Lors de la dernière journée d'un championnat international d'athlétisme, 70 % des spectateurs sont français et les autres sont étrangers. De plus, 85 % des spectateurs étrangers et 25 % des spectateurs français possèdent une licence d'athlétisme.

Calculer le pourcentage de spectateurs licenciés parmi l'ensemble des spectateurs.

Publication sous licence Creative Commons 🅭🅯🄏⊜ 16 mars 2021 – Pascal CHAUVIN

Chapitre 2

Suites numériques

1 Définition et notations

Définition 1 – suite

Une suite u (de nombres réels) est une fonction dont la variable est un nombre entier naturel.
Si on note n la variable, alors on écrit : $u_n = u(n)$ pour désigner l'image de l'entier n par u.

1.1 Suite définie explicitement

Définition 2

Une suite est définie explicitement lorsqu'on sait calculer un terme quelconque, en fonction de son rang (sans avoir à connaître aucun autre terme).

1.2 Suite définie par récurrence

Définition 3

On dit qu'une suite est définie par récurrence lorsque :

1. on connaît son premier terme ;
2. on sait calculer n'importe quel terme à partir du précédent.

1.3 Représentation graphique

On peut représenter graphiquement les termes d'une suite dans un repère orthonormé du plan, en plaçant dans ce repère les premiers points de coordonnées $(n; u_n)$.

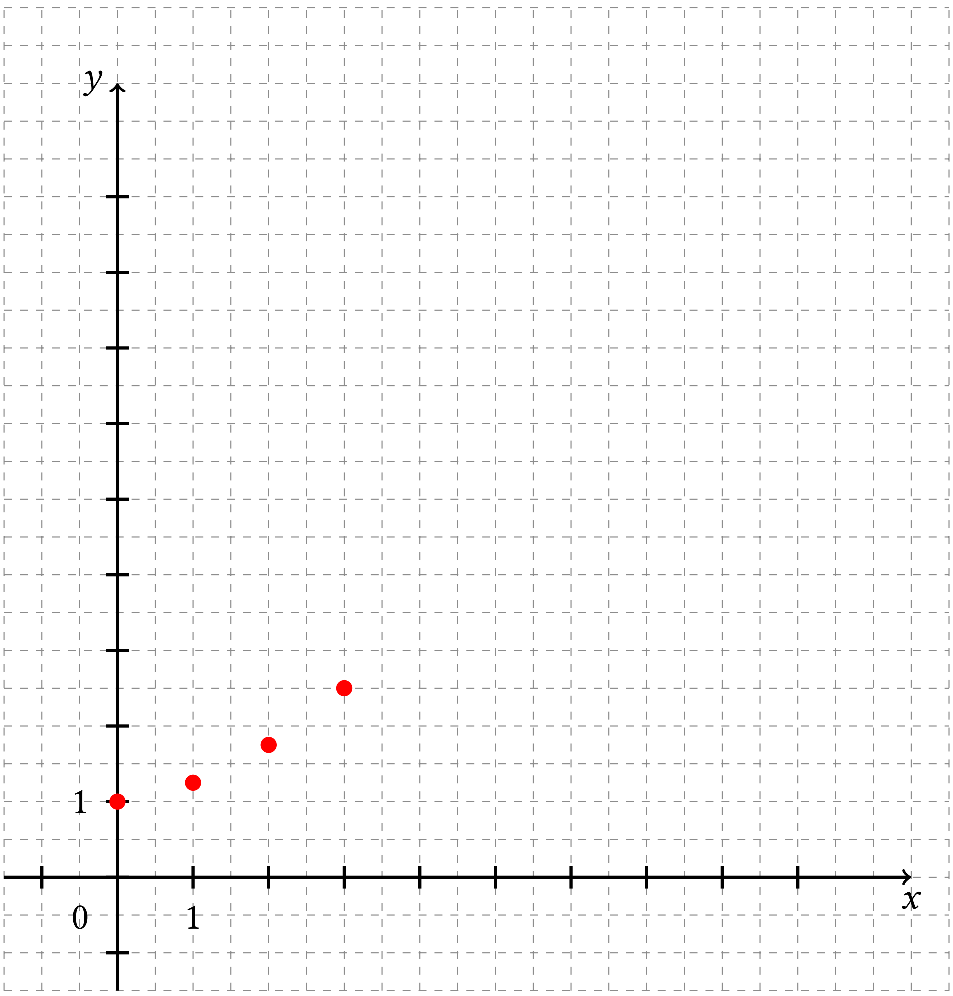
Par exemple, la suite (u_n) est définie à partir du rang 0 par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{pour tout entier } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{4}(n+1) \end{cases}$$

Les sept premiers termes de u sont :

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	1						

La suite (u_n) pourra être représentée graphiquement par :



2 Sens de variation d'une suite

Définition 4 – Suite croissante

On dit qu'une suite (u_n) est croissante lorsqu'on a la propriété :

Pour n'importe quel entier naturel n, $u_n < u_{n+1}$.

(ce qui signifie que n'importe quel terme est toujours plus grand que le précédent)

Définition 5 – Suite décroissante

On dit qu'une suite (u_n) est décroissante lorsqu'on a la propriété :

Pour n'importe quel entier naturel n, $u_n > u_{n+1}$.

(autrement dit : n'importe quel terme est toujours plus petit que le précédent)

Définition 6 – Suite monotone

Une suite est appelée monotone si elle croissante ou si elle est décroissante.

3 Suites arithmétiques

Définition 7 – Suite arithmétique

On dit qu'une suite est arithmétique lorsqu'on calcule un terme en ajoutant toujours le même nombre (qui peut être négatif ou positif) au terme précédent.

a et b sont deux nombres réels.

La suite (u_n) définie à partir du rang 0 par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \text{pour tout entier } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + b \end{cases}$$

est appelée suite arithmétique de premier terme a et de raison b.

Remarque : la raison d'une suite arithmétique est souvent notée r.

Propriété 1

1. Une suite arithmétique de raison r positive est croissante.
2. Une suite arithmétique de raison r négative est décroissante.
3. Une suite arithmétique de raison r nulle est constante.

Publication sous licence Creative Commons 16 mars 2021 – Pascal CHAUVIN

4 Suites géométriques

Définition 8 – Suite géométrique

On dit qu'une suite est géométrique lorsqu'on calcule un terme en multipliant, toujours par le même nombre, le terme précédent.

a et b sont deux nombres réels.

La suite (u_n) définie à partir du rang 0 par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \text{pour tout entier } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = b \times u_n \end{cases}$$

est appelée suite géométrique de premier terme a et de raison b.

Remarque : la raison d'une suite géométrique est souvent notée q.

Propriété 2

On considère une suite géométrique de premier terme positif et de raison positive.

1. Une suite géométrique de raison q comprise entre 0 et 1 ($q \in]0;1[$) est décroissante.
2. Une suite géométrique de raison q supérieure à 1 est croissante.
3. Une suite géométrique de raison q égale à 1 est constante.

Publication sous licence Creative Commons 🅭🅯🄏🄍 16 mars 2021 – Pascal CHAUVIN

Chapitre 3

Polynômes : second degré et troisième degré

1 Fonctions polynômes du second degré

Dans ce paragraphe, on étudie les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme :

$$\boxed{f(x) = a\,x^2 + b\,x + c}$$

On suppose que le nombre a est non nul (c.-à-d. $a \neq 0$).

La courbe qui représente f dans un repère du plan est appelée **parabole**.

Définition 1 – sommet

Le point d'intersection entre la parabole et son axe de symétrie est appelé **sommet de la parabole**.

Attention, la langue française est trompeuse : une parabole pourra être située au-dessus de son sommet ou en dessous de son sommet !

Propriété 1 – coordonnées du sommet

L'abscisse du sommet de la parabole est $\dfrac{-b}{2\,a}$; son ordonnée est $f\left(\dfrac{-b}{2\,a}\right)$.

1.1 Factorisation

La connaissance des racines (quand elles existent) permet de factoriser le polynôme du second degré quand on connaît ses racines :

Propriété 2 – factorisation

f est une fonction du second degré, avec $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ (et $a \neq 0$).

Si x_1 et x_2 sont les racines du polynôme (c'est-à-dire $f(x_1) = 0$ et $f(x_2) = 0$), alors on a l'identité :

$$f(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)\,.$$

1.2 Propriétés

Propriété 3

f est une fonction polynôme du second degré, avec une expression de la forme :

$$f(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$$

Alors :

1. La parabole qui représente f dans un repère orthonormé possède un axe de symétrie, qui passe par le sommet (de la parabole) et qui est parallèle à l'axe des ordonnées.
2. Si on note α l'abscisse du sommet, alors $\alpha = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ et l'équation $x = \alpha$ est une équation de l'axe de symétrie.
3. Si a est un nombre réel **strictement positif**, alors la parabole possède une allure en forme de « $\bigcup$ » (elle est tournée vers le haut).
4. Si a est un nombre réel **strictement négatif**, alors la parabole possède une allure en forme de « $\bigcap$ » (elle est tournée vers le bas).

1.3 Cas particuliers : les fonctions du types $x \longmapsto a\,x^2 + c$

Il s'agit des cas où le coefficient b est nul.

Propriété 4

1. La parabole qui représente f dans un repère orthonormé possède un axe de symétrie, est l'axe des ordonnées.
2. Le sommet de la parabole est un point de l'axe des ordonnées.

Publication sous licence Creative Commons 🅭🅯🄏🄍 16 mars 2021 – Pascal CHAUVIN

2 Fonctions polynômes du troisième degré

Dans ce paragraphe, on étudie les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par une expression **de l'une des deux formes suivantes** :

$$f(x) = a\,x^3 + b$$

ou bien :

$$f(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)\,(x - x_3)$$

Dans les deux cas précédents, on suppose que le nombre a est non nul (c.-à-d. $a \neq 0$).

Propriété 5 – racines

Les racines du polynôme $a\,(x - x_1)\,(x - x_2)\,(x - x_3)$ sont les nombres x_1, x_2 et x_3.

Propriété 6

c désigne un nombre réel positif.

L'équation $x^3 = c$ possède une solution unique.

Cette solution est le nombre positif noté $c^{\frac{1}{3}}$ ou bien $\sqrt[3]{c}$.

Propriété 7

La courbe qui représente une fonction polynôme de degré 3 du type $f(x) = a\,x^3$ est symétrique par rapport au point O origine du repère.

Publication sous licence Creative Commons 16 mars 2021 – Pascal CHAUVIN

Chapitre 4

Proportions et évolutions

1 Taux d'évolution : rappels

On considère une grandeur, dans deux états A et B (initial et final, par exemple) et les valeurs correspondantes de cette grandeur V_A et V_B.

Définition 1 – Taux d'évolution (d'une grandeur)

— La **variation absolue** de la grandeur entre A et B est égale à $V_B - V_A$.

— La **variation relative** de la grandeur entre A et B est égale à $\dfrac{V_B - V_A}{V_A}$.

La **variation relative** est aussi appelée **taux d'évolution**. La **variation relative** est notée t :

$$t = \frac{V_B - V_A}{V_A}$$

Propriété 1

Avec les notations précédentes, on a :

$$V_B = (1 + t) \times V_A$$

Définition 2 – coefficient multiplicateur

Le nombre $(1 + t)$ est appelé **coefficient multiplicateur** associé au taux d'évolution t.

Parfois, on rencontre la notation CM pour le coefficient multiplicateur.

Propriété 2

- Dans le cas d'une variation « à la baisse » (diminution), le coefficient multiplicateur est un réel de $[0;1]$.
- Dans le cas d'une variation « à la hausse » (augmentation), le coefficient multiplicateur est un réel de $]1;+\infty[$.

2 Évolutions successives

Définition 3 – Évolutions successives

Lorsqu'une grandeur subit plusieurs évolutions successives de taux t_1, t_2, ..., t_n, on dit qu'elle subit une **évolution globale** de **taux global** t.

Propriété 3

Avec les notations précédentes, on a :

$$c = c_1 \times c_2 \times \ldots \times c_n$$

où c_1 est le coefficient multiplicateur associé au taux t_1, c_2 est le coefficient multiplicateur associé à t_2, ..., c_n est le coefficient multiplicateur associé à t_n.

3 Évolution réciproque

On considère une grandeur, dans deux états A et B (initial et final, par exemple) et les valeurs correspondantes de cette grandeur V_A et V_B.

Définition 4 – Taux d'évolution réciproque

Le **taux d'évolution réciproque** de l'état B vers l'état A d'une grandeur, est le taux d'évolution qui permet de revenir de l'état B vers l'état A pour cette grandeur.

Propriété 4

Si on note t le taux d'évolution de A vers B et t' le taux d'évolution de B vers A, et c et c' les coefficients multiplicateurs respectifs associés, alors on aura :

$$c' = \frac{1}{c}$$

Chapitre 5

Dérivation (1/2)

1 Rappels : taux de variation

f est une fonction définie sur un intervalle I.

a et b sont deux nombres distincts dans I.

Définition 1 – Taux de variation

Le nombre $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est appelé taux de variation de la fonction f entre a et b.

Remarques

1. Si on note A et B les points de la représentation graphique de f, d'abscisses respectives $x_A = a$ et $x_B = b$, alors le taux de variation de la fonction f entre a et b est égal au coefficient directeur de la droite (AB).

2. Si on choisit d'écrire : $h = b - a$, on obtient une nouvelle écriture du taux de variation :
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

2 Nombre dérivé en un point

f est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

a est un nombre de I, h est un nombre réel non nul.

Définition 2 – Nombre dérivé

Si la valeur de l'expression $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers un nombre L lorsque le nombre h tend vers 0, on dit que la fonction f est dérivable en a.

Dans ce cas, le nombre L est appelé nombre dérivé de la fonction f en a. On écrit :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = L$$

Définition 3 – Nombre dérivé : notation

Le nombre dérivé de la fonction f en a, quand il existe, est noté $f'(a)$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$$

Publication sous licence Creative Commons 16 mars 2021 – Pascal CHAUVIN

3 Nombre dérivé et tangente

Soit f une fonction dérivable en un nombre réel a de son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$.

On note $\left(\mathcal{C}_f\right)$ la représentation graphique de la fonction f.

Définition 4 – Sécante à une courbe

Toute droite passant par le point $A(\,a\,;\,f(a)\,)$ et un autre point de $\left(\mathcal{C}_f\right)$, distinct de A, est appelée droite sécante à la courbe $\left(\mathcal{C}_f\right)$.

Définition 5 – Tangente à une courbe

La droite passant par le point A et qui représente la « position limite » des sécantes à à la courbe $\left(\mathcal{C}_f\right)$ au point A est appelée tangente à la courbe $\left(\mathcal{C}_f\right)$ au point A.

Propriété 1 – Coefficient directeur de la tangente

f est une fonction définie et dérivable en un réel a de son ensemble de définition.

Alors la tangente à la courbe $\left(\mathcal{C}_f\right)$ au point d'abscisse a :

- passe par le point A;
- possède comme coefficient directeur le nombre dérivé de f en a.

Publication sous licence Creative Commons 🅭🅯🄏🄍 16 mars 2021 – Pascal CHAUVIN

4 Fonction dérivée d'une fonction

Définition 6 – Fonction dérivée

f est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, dont on sait qu'elle est dérivable en n'importe quel réel a de I.

La fonction définie sur I, qui à tout réel a de I associe le nombre dérivé de f en a est une nouvelle fonction $a \longmapsto f'(a)$; cette nouvelle fonction est notée f' et elle est appelée **fonction dérivée de f**.

5 Fonctions dérivées des fonctions usuelles

Propriété 2

Dans le formulaire, on suppose : $k \in \mathbb{R}$; $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

fonction	définie sur	dérivable sur	fonction dérivée
$f(x) = k$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = a\,x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$
$f(x) = a\,x + b$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2\,x$
$f(x) = x^3$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 3\,x^2$

Publication sous licence Creative Commons 16 mars 2021 – Pascal CHAUVIN

6 Fonctions dérivées et opérations

6.1 Fonction dérivée de la somme de deux fonctions

Propriété 3

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Alors la fonction f définie sur I par : $f(x) = u(x) + v(x)$ est dérivable sur I, avec :

$$\forall x \in I,\ f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

Pour mémoriser la formule, on peut écrire plus simplement *sans les x* :

$$\text{Si} \quad f = u + v \quad \text{alors} \quad f' = u' + v'$$

Ou même, sans donner de nom à la *fonction somme* :

$$(u+v)' = u' + v'$$

On peut démontrer la propriété analogue pour la *fonction différence* de u par v :

$$(u-v)' = u' - v'$$

6.2 Fonction dérivée du produit par une constante

Propriété 4 – fonction dérivée de $k \times u$

La fonction u est définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, k est un nombre réel.

Alors la fonction $x \longmapsto k \times u(x)$ est définie et dérivable sur I, avec :

$$\forall x \in I,\ (k \times u)'(x) = k \times u'(x)$$

On écrit plus simplement :

$$(k\,u)' = k\,u'$$

Publication sous licence Creative Commons 🅭🅯🄏🄍 16 mars 2021 – Pascal CHAUVIN

Chapitre 6

Dérivation (2/2)

1 Fonction dérivée et variations d'une fonction

On considère une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Propriété 1

1. f est croissante sur I si, et seulement si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$.
2. f est décroissante sur I si, et seulement si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$.
3. f est constante sur I si, et seulement si, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.

2 Extremum d'une fonction

On considère une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et $a \in I$.

Définition 1 – maximum

f possède un maximum en a sur I lorsque, pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant f(a)$.

Le maximum de f sur I est alors égal à $f(a)$ (le maximum est atteint pour $x = a$).

Remarques :

1. On dispose d'une définition analogue pour le minimum d'une fonction sur un intervalle.
2. Un extremum est un maximum ou un minimum.

Propriété 2

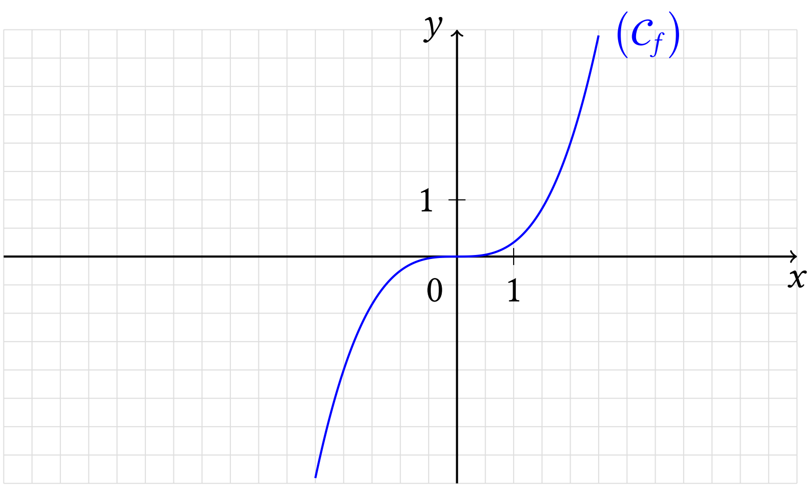
f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle ouvert I.

a est un réel de I, qui n'est pas l'une des bornes de I.

Si f possède un extremum en a alors $f'(a) = 0$.

Attention : l'énoncé réciproque est faux !

Par exemple :



$$f \;:\; x \longmapsto 0{,}25\,x^3$$