Mathématiques

Pascal CHAUVIN

2nde

8 mai 2018

Table des matières

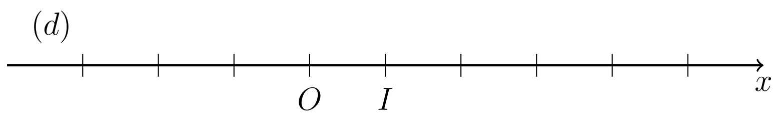
1 Fonctions

1.1 La droite réelle

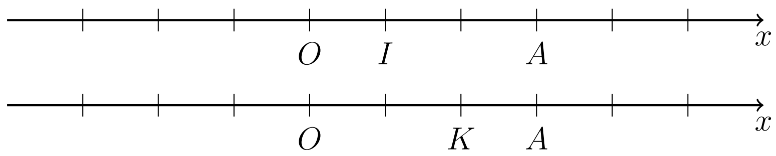
La droite (d) est munie d'un repère (O,I).

Les points O et I ont comme coordonnées : $O\,(0)$ et $I\,(1)$.

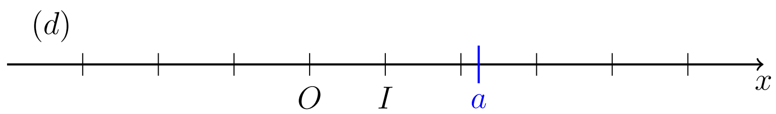
Dans le repère (O,I), l'abscisse du point O est 0 et l'abscisse du point I est 1.



Dire que l'abscisse d'un point A dans le repère (O,I) est 3 signifie que la position de A *relativement aux points O et I* est donnée par le nombre 3.



- Dans le repère (O,I), l'abscisse du point A est …
- Dans le repère (O,K), l'abscisse du point A est …



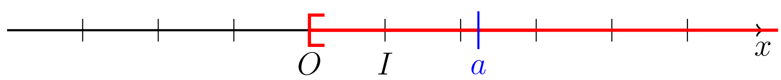
Pour n'importe quel nombre a, il existe un point de la droite (OI) dont l'abscisse est a dans le repère (O,I).

Définition 1 – *ensemble* $\mathbb{R}$

- L'ensemble des *nombres réels* (les nombres) est noté $\mathbb{R}$.
- La droite qui représente $\mathbb{R}$ est appelée *droite réelle*.

La phrase : « $\sqrt{7}$ est un nombre réel. »

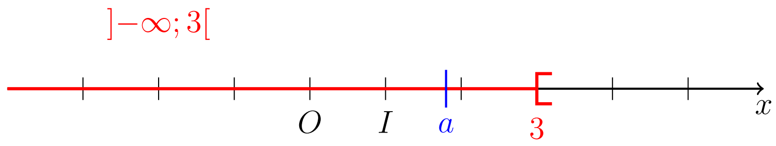
s'écrit symboliquement : « $\sqrt{7} \in \mathbb{R}$ »



La demi-droite $[Ox)$ représente l'ensemble $\mathbb{R}^+$ de tous les nombres positifs. On écrit :

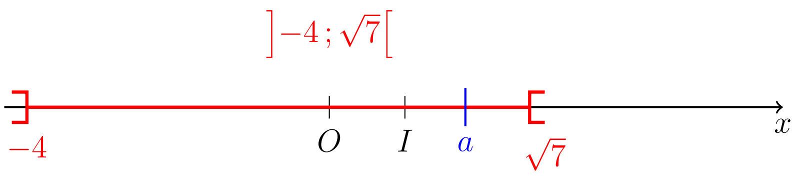
- $a \geqslant 0$.
- $a \in \mathbb{R}^+$.
- $a \in [0; +\infty[$.

La notation « $+\infty$ » est lue « plus l'infini ».
On définit aussi la notation $\mathbb{R}^-$ par ...



On peut exprimer qu'un nombre a appartient à l'ensemble des nombres strictement plus petits que 3 par :

- $a \in]-\infty; 3[$.
- $a < 3$.



On peut exprimer qu'un nombre a appartient à l'ensemble des nombres strictement plus grands que -4 et strictement plus petits que $\sqrt{7}$ par :

- $a \in \left]-4; \sqrt{7}\right[$.
- $-4 < a$ <u>et</u> $a < \sqrt{7}$.
  On peut résumer les deux inégalités par : $-4 < a < \sqrt{7}$.

Exercice : représenter, sur trois dessins distincts, chacun des ensembles $\left[-4; \sqrt{7}\right]$; $\left]-4; \sqrt{7}\right]$; $\left[-4; \sqrt{7}\right[$.

Définition 2 – *intervalle de $\mathbb{R}$*

Les ensembles :

$$\left]-4\,;\sqrt{7}\right[\ ;\quad \left[-4\,;\sqrt{7}\right]\ ;\quad \left]-4\,;\sqrt{7}\right]\ ;\quad \left[-4\,;\sqrt{7}\right[$$

sont appelés *intervalles de $\mathbb{R}$*.

Ces intervalles ont comme *extrémités* (on dit aussi *bornes*) les nombres -4 et $\sqrt{7}$.

1.2 Vocabulaire et notations

Voici un exemple de définition d'une fonction mathématique f :

$$f:\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (3\,x+1)^2 \end{array}$$

Dans cet exemple :

— f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ (*c.-à-d.* pour n'importe quel nombre réel) ;
— la *valeur de f pour le nombre x* est un nombre réel.
Ce nombre est appelé *image de x* et il est noté $f(x)$:

$$f(x) = (3\,x+1)^2\ .$$

On peut calculer, pour plusieurs nombres réels, l'image de chacun d'eux par f. Par exemple :

$$f(0)\ ;\quad f(-1)\ ;\quad f(3)\ ;\quad f\left(\frac{-2}{3}\right)\ldots$$

On peut regrouper ces images dans un *tableau de valeurs* :

Valeur de x	0	-1	3	$\frac{-2}{3}$	$\ldots$
Valeur de $f(x)$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

— L'image de 1 par f est 16 : $f(1) = 16$.
On dit aussi que le nombre 1 est un *antécédent* de 16 pour la fonction f.
— Les nombres 0 et $\dfrac{-2}{3}$ ont la même image par f :

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad f\left(\frac{-2}{3}\right) = 1\,.$$

— Le nombre -4 ne possède pas d'antécédent pour la fonction f.
En effet, pour n'importe quel nombre x, on a :

$$(3\,x+1)^2 \geqslant 0 \quad \text{et} \quad 0 > -4\,.$$

Donc $(3\,x+1)^2$ ne peut pas être égal à -4.

1.2.1 Ensemble de définition

Définition 3 – *ensemble de définition*

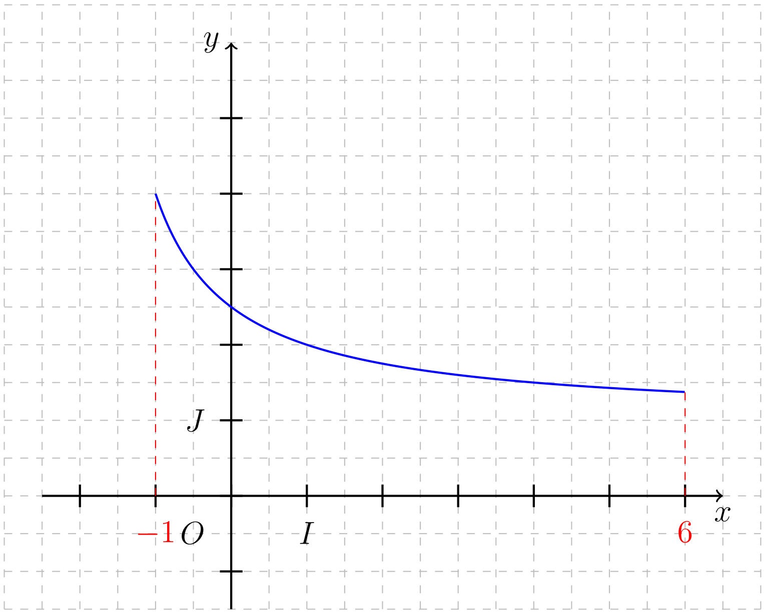
On appelle *ensemble de définition* d'une fonction, l'ensemble de tous les nombres qui ont une image par la fonction f.

Définition 4 – *représentation graphique*

On considère un repère orthonormé (O,I,J).

On appelle *représentation graphique* d'une fonction f, l'ensemble des points M de coordonnées $M\,(x; f(x))$ lorsque x prend toutes les valeurs possibles dans l'ensemble de définition de f.

On dit aussi *courbe représentative* de f.



1.2.2 Variations

On considère une fonction f définie sur un intervalle I.

Définition 5 – *fonction croissante*

On dit que la fonction f est *croissante* sur I lorsque :

Pour n'importe quels nombres a et b de I :

Si $a < b$ alors $f(a) \leqslant f(b)$.

On considère une fonction f définie sur un intervalle I.

Définition 6 – *fonction strictement croissante*

On dit que la fonction f est *strictement croissante* sur I lorsque :

Pour n'importe quels nombres a et b de I :

Si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$.

Écrire les définitions de :

— *fonction décroissante*;

— *fonction strictement décroissante*.

Définition 7 – *tableau de variations*

Lorsqu'on étudie une fonction, on regroupe dans un *tableau de variations* les informations :

— son ensemble de définition ;

— ses variations ;

— les valeurs de quelques images.

2 Statistiques

2.1 Effectifs et fréquences

On considère une série statistique à caractère numérique :

valeur du caractère	x_1	x_2	$\dots$	x_p
effectif	n_1	n_2	$\dots$	n_p

- ☞ La série possède p valeurs distinctes du caractère.
- ☞ En pratique, on organise le tableau en classant les valeurs x_i par ordre croissant :

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_p\,.$$

Définition 1 – ***effectifs et effectif total***

Le nombre noté n_i est appelé *effectif* de la valeur x_i.

La somme des effectifs de toutes les valeurs du caractère est appelée *effectif total* de la série ; si on note N l'effectif total :

$$N = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_p\,.$$

Définition 2 – ***fréquence d'un caractère***

On appelle *fréquence* de la valeur x_i, notée f_i, le quotient de l'effectif de la valeur x_i par l'effectif total :

$$f_i = \frac{n_i}{n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_p} = \frac{n_i}{N}$$

- La fréquence d'une valeur du caractère est un nombre de l'intervalle $[\,0\,;\,1\,]$.
- On peut choisir d'exprimer la fréquence d'une valeur en pourcentage.

Définition 3 – ***effectif cumulé croissant***

L'*effectif cumulé croissant* de la valeur x_i est la somme des effectifs pour toutes les valeurs du caractère inférieures ou égales à x_i :

$$n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_i$$

De manière analogue, on définit la fréquence cumulée croissante :

Définition 4 – *fréquence cumulée croissante*

La *fréquence cumulée croissante* est la somme des fréquences des valeurs du caractère inférieures ou égales à x_i :

$$f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_i$$

Propriété 1

La *fréquence cumulée croissante* du caractère x_i est égale au quotient de l'effectif cumulé croissant de la valeur x_i par l'effectif total :

$$\frac{n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_i}{n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_p} = \frac{n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_i}{N}$$

2.2 Moyenne

Définition 5 – *moyenne*

La *moyenne* de la série statistique, notée $\bar{x}$, est le nombre défini par :

$$\bar{x} = \frac{n_1 \times x_1 + n_2 \times x_2 + \cdots + n_p \times x_p}{n_1 + n_2 + \cdots + n_p}$$

La moyenne est un *indicateur de position*.

Propriété 2

On a l'égalité :

$$\bar{x} = f_1 \times x_1 + f_2 \times x_2 + \cdots + f_p \times x_p$$

Cette propriété permet donc de calculer la moyenne d'une série statistique à l'aide des fréquences.

Remarque :

La définition précédente de la moyenne est convient pour les séries à *caractère discret*, dont les valeurs sont isolées (*c.-à-d.* peu nombreuses).

Cette définition peut aussi être appliquée aux séries à *caractère continu* : dans ce cas, les valeurs sont regroupées en *classes*, puis on considère que la valeur du caractère est le *centre* de chaque classe.

2.3 Médiane et quartiles

Définition 6 – *médiane*

Une *médiane* d'une série statistique est un nombre noté M_e, pour lequel :

- au moins 50 % des valeurs sont inférieures ou égales à M_e ;
- au moins 50 % des valeurs sont supérieures ou égales à M_e.

Une médiane est un *indicateur de position*.

En pratique, on détermine une médiane de la façon suivante :

- Pour un effectif total impair, on prend comme médiane la valeur « centrale » du caractère.
- Pour un effectif total pair, on peut choisir comme médiane la demi-somme des deux valeurs « centrales ».

Définition 7 – *quartiles Q_1 et Q_3*

- Le 1er quartile Q_1 est la plus petite valeur du caractère, pour laquelle au moins 25 % des valeurs sont inférieures à Q_1.
- Le 3e quartile Q_3 est la plus petite valeur du caractère, pour laquelle au moins 75 % des valeurs sont inférieures à Q_3.

Les quartiles sont des indicateurs de dispersion.

Remarque :

- Les quartiles Q_1 et Q_3 sont des valeurs du caractère.
- La médiane M_e pourra *éventuellement* être une valeur du caractère mais ce n'est pas nécessaire.

Pour compléter l'étude d'une série statistique, on observe également souvent deux autres indicateurs de dispersion :

Définition 8 – *étendue*

On appelle *étendue* la différence $x_p - x_1$ (*c.-à-d.* la différence entre la plus grande valeur et la plus petite valeur du caractère).

Définition 9 – *écart interquartile*

On appelle *écart interquartile* la différence $Q_3 - Q_1$.

3 Fonctions affines

3.1 Fonction affine. Fonction linéaire

Définition 1 – *fonction affine*

a et b sont deux nombres réels. La fonction f :

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & a\,x+b \end{array}$$

est appelée *fonction affine*.

Dans le cas où $b=0$, on dit que f est une *fonction linéaire*.

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & a\,x \end{array}$$

1. On rappelle que l'expression :
$$f(x)=a\,x+b$$
doit être comprise comme (on n'écrit pas le signe de multiplication lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté) :
$$f(x)=a\times x+b$$
2. Les fonctions linéaires sont des cas particuliers de fonctions affines (pour $b=0$). On a donc :
   - toutes les fonctions linéaires sont des fonctions affines ;
   - il existe des fonctions affines qui ne sont pas linéaires.

3.2 Représentation graphique

Propriété 1

Dans un repère, la fonction affine $f: x \longmapsto a\,x+b$ est représentée par une droite sécante avec l'axe des ordonnées.

Important !

Pour une fonction linéaire ($b=0$), la représentation graphique de la fonction affine est une droite qui passe par l'origine du repère.

Propriété 2

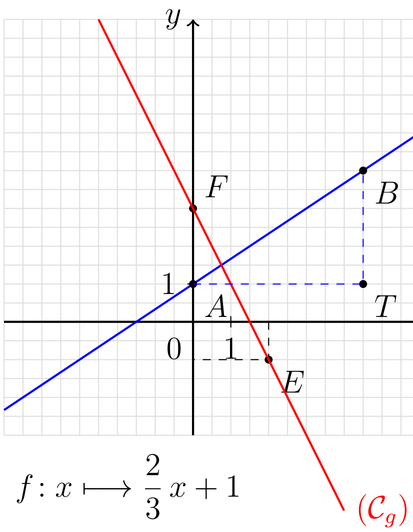
Dans un repère, on note (d) la droite qui représente une fonction affine $f: x \longmapsto a\,x+b$.

Si $M(x_M;y_M)$ appartient à (d), alors : $y_M=a\,x_M+b$, et seulement dans ce cas.

Définition 2 – *équation de droite*

L'équation $y = a\,x + b$ est appelée *équation de la droite* (d).

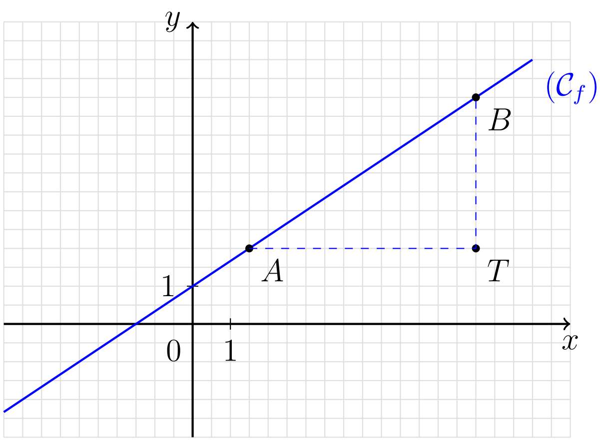
— le nombre a est appelé *coefficient directeur* de (d) ;
— le nombre b est appelé *ordonnée à l'origine* de (d).



$f : x \longmapsto \dfrac{2}{3}\,x + 1$

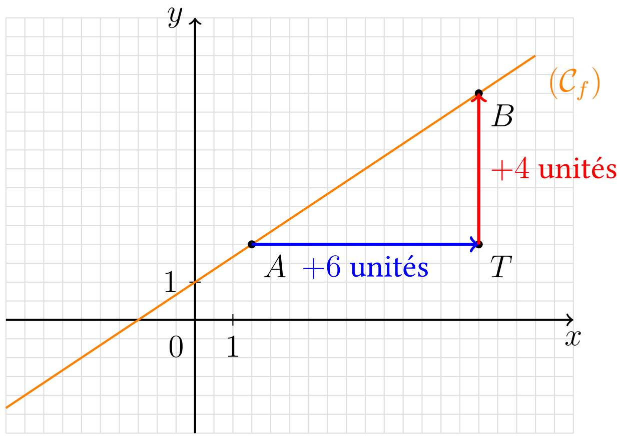
$g : x \longmapsto -2\,x + 3$

3.2.1 Interprétation du coefficient directeur et de l'ordonnée à l'origine



$f : x \longmapsto \dfrac{2}{3}\,x + 1$

3.2.2 Détermination graphique du coefficient directeur et de l'ordonnée à l'origine



$f : x \longmapsto \dfrac{2}{3}x + 1$

Propriété 3

La droite (d) qui représente la fonction affine $f : x \longmapsto a\,x + b$ passe par le point de coordonnées $(0; b)$.

Propriété 4

Si A et B sont deux points (distincts) de la droite (d) qui représente la fonction affine $f : x \longmapsto a\,x + b$, alors :

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = a$$

3.3 Variations

Propriété 5

On considère la fonction affine $f : x \longmapsto a\,x + b$, alors :

1. si $a > 0$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$;
2. si $a < 0$, alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$;
3. si $a = 0$, alors f est constante sur $\mathbb{R}$.

Important !

Dans le cas $a = 0$, la représentation graphique de la fonction affine est la droite qui passe par le point $(0; b)$ et qui est parallèle à l'axe des abscisses.

3.4 Signe de $a\,x+b$

Propriété 6 – *équation* $a\,x+b=0$

On considère la fonction affine $f : x \longmapsto a\,x+b$, avec $a \neq 0$:
L'équation $a\,x+b=0$ possède exactement une solution dont la valeur est $x = \dfrac{-b}{a}$.

Propriété 7 – *signe de* $a\,x+b$, *quand* $a>0$

On considère la fonction affine $f : x \longmapsto a\,x+b$, avec $a>0$:

x	$-\infty$		$\dfrac{-b}{a}$		$+\infty$
signe de $a\,x+b$		*négatif*	0	*positif*	

Propriété 8 – *signe de* $a\,x+b$, *quand* $a<0$

On considère la fonction affine $f : x \longmapsto a\,x+b$, avec $a<0$:

x	$-\infty$		$\dfrac{-b}{a}$		$+\infty$
signe de $a\,x+b$		*positif*	0	*négatif*	

4 Translations et vecteurs

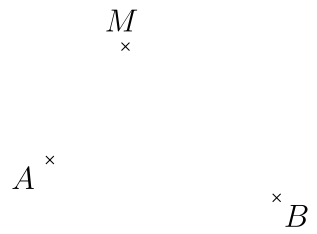
4.1 Translation

On rappelle une propriété très utile pour le chapitre :

Rappel

Un quadrilatère est un parallélogramme si, et seulement si, ses diagonales sont deux segments de même milieu.

On considère trois points A, B et M :

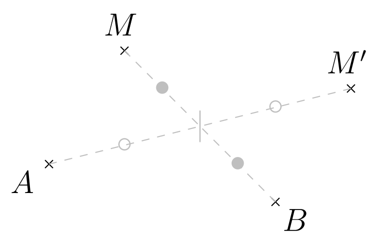


Définition 1 – *translation*

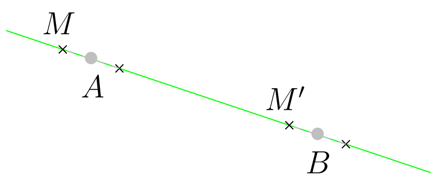
A et B sont deux points.

On dit que le point M' est l'image du point M par la *translation qui envoie A en B* lorsque les segments $[AM']$ et $[BM]$ ont le même milieu.

On construit le point M' :



La définition s'applique aussi lorsque les points A, B et M sont alignés (la figure est plus « difficile » à lire) :



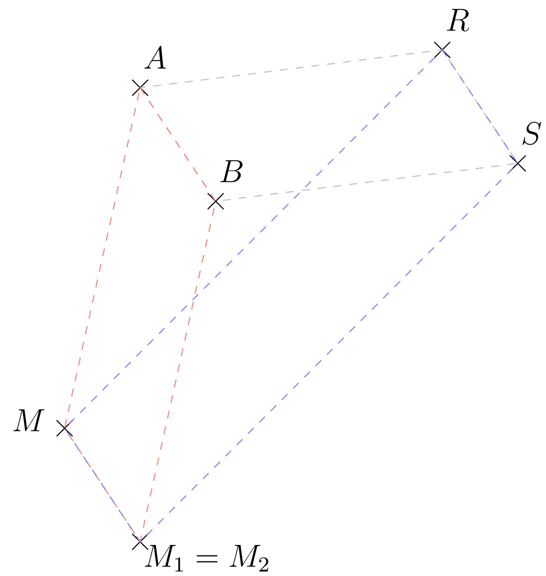
Propriété 1

A et B sont deux points.

Si le point M' est l'image d'un point M par la *translation qui envoie A en B*, alors $MABM'$ est un parallélogramme, et seulement dans ce cas.

Translations de même effet

On note M_1 l'image de M par la translation qui envoie A en B et M_2 l'image de M par la translation qui envoie R en S :



On démontre que :

- si $ABSR$ est un parallélogramme, alors M_1 et M_2 sont confondus ;
- si M_1 et M_2 sont confondus, alors $ABSR$ est un parallélogramme.

Propriété 2 – *translations de même effet*

Si $RABS$ est un parallélogramme, alors la translation qui envoie A en B et la translation qui envoie R en S « produisent le même effet », et seulement dans ce cas.

4.2 Vecteur

Définition 2 – *vecteur*

A et B sont deux points.

On appelle translation de *vecteur $\overrightarrow{AB}$* la translation qui envoie A en B.

Le terme « vecteur » désigne donc trois informations :

— une direction[1] :
  $\rightsquigarrow$ c'est la direction de la droite (AB) ;
— une longueur :
  $\rightsquigarrow$ la longueur du segment $[AB]$ (elle est notée AB) ;
— un sens :
  $\rightsquigarrow$ sur la droite (AB), c'est le sens du point A vers le point B.

Notation

Quand la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et la translation de vecteur $\overrightarrow{RS}$ ont le même effet, on écrit :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{RS}$$

Attention !

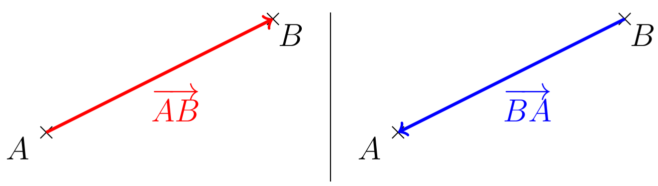
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ et le vecteur $\overrightarrow{BA}$:

— ont la même direction ;
— ont des extrémités qui déterminent des segments de même longueur ($AB = BA$) ;
— *mais ils n'ont pas le même sens!*

$$\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$$

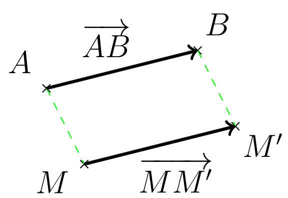
Définition 3 – *vecteurs opposés*

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont appelés *vecteurs opposés*.



Propriété 3

Si M' est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, alors : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$, et seulement dans ce cas.



4.2.1 Vecteurs égaux et milieu d'un segment

1. On dit que des droites parallèles ont la même direction.

Propriété 4

Si le point I est le milieu du segment $[AB]$, alors : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

On peut démontrer que la *propriété réciproque* est vraie :

Propriété 5 – *(réciproque)*

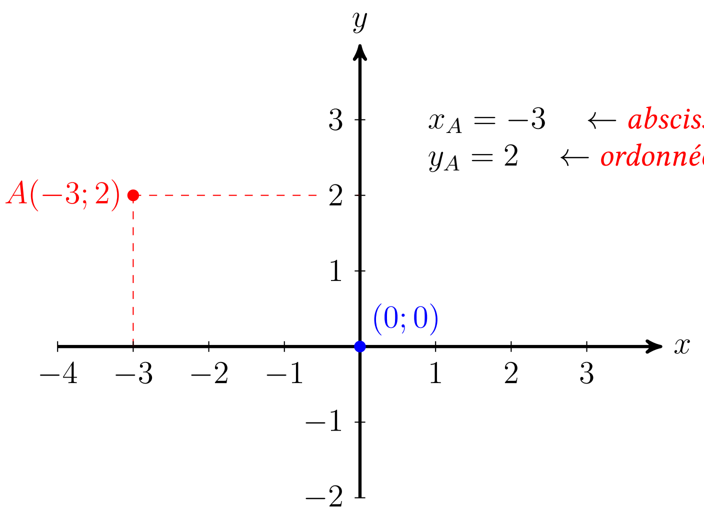
Si, pour trois points A, B et M, on a :

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB},$$

alors le point M est le milieu du segment $[AB]$.

4.3 Coordonnées d'un vecteur

On rappelle la notation des coordonnées d'un point $A(-3; 2)$ dans un *repère du plan* :



Définition 4 – *repère orthonormé*

On dit qu'un repère est un *repère orthonormé* lorsque :

- l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées sont perpendiculaires ;
- l'unité de l'axe des abscisses et l'unité de l'axe des ordonnées sont deux segments de même longueur.

Définition 5 – *coordonnées d'un vecteur*

On appelle *coordonnées* du vecteur $\overrightarrow{AB}$ le couple $(x_B - x_A; y_B - y_A)$.

On écrit : $\overrightarrow{AB}\,(x_B - x_A; y_B - y_A)$

☞ *Attention à l'ordre des nombres dans la formule !*

Par exemple, pour les points $A\,(5\,;3)$ et $B\,(-2\,;8)$, on a :

$$\overrightarrow{AB}\,(-2-5\,;8-3)$$

c'est-à-dire :

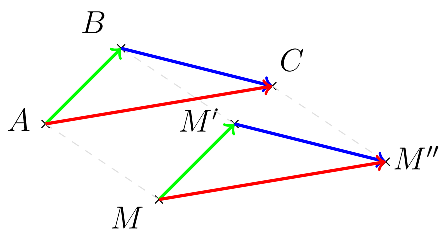
$$\overrightarrow{AB}\,(-7\,;5)$$

Propriété 6

Deux vecteurs sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coordonnées.

4.4 Somme de deux vecteurs

On peut démontrer qu'en faisant suivre la translation qui envoie un point A au point B, par la translation qui envoie le point B en un point C, on obtient une nouvelle translation : c'est la translation qui envoie A en C.



Pour les vecteurs, on traduit cette propriété en posant comme définition de la somme de deux vecteurs [2] :

Définition 6 – ***somme de deux vecteurs***

A, B et C sont trois points. On appelle *somme des vecteurs* $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ le vecteur défini par :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

☞ Cette égalité porte le nom de « *Relation de Chasles* ».

☞ Dans l'égalité, il faut bien observer que l'extrémité du premier terme (vecteur) est le même point que l'origine du second terme (ici le point B « entoure » le signe $+$).

Définition 7 – ***règle du parallélogramme***

A, B et C sont trois points :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AT}$$

où le point T est le quatrième sommet du parallélogramme $ABTC$.

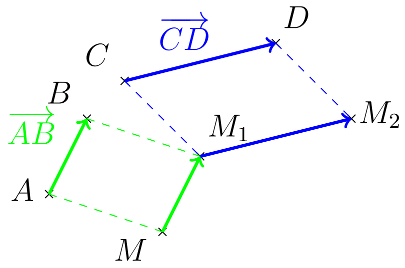
2. Attention ! Dans la définition, l'extrémité du premier vecteur coïncide avec l'origine du second vecteur !

Une première propriété

A, B, C et D sont quatre points.

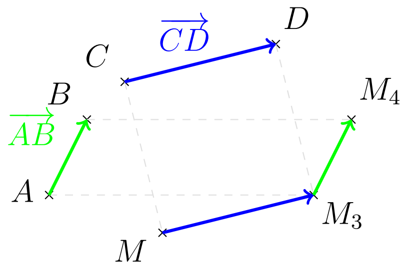
1re situation

On fait suivre la translation qui envoie le point A au point B, par la translation qui envoie le point C au point D :



2e situation

On fait suivre la translation qui envoie le point C au point D, par la translation qui envoie le point A au point B :

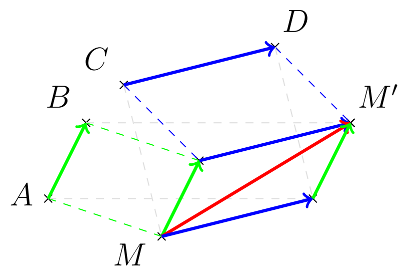


On peut démontrer que les points M_2 et M_4 sont confondus.
Cette égalité se traduit par la propriété :

Propriété 7 – ***commutativité***

A, B, C et D sont quatre points quelconques. Alors :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}$$



On peut aussi démontrer l'égalité suivante :

Propriété 8 – *associativité*

A, B, C, D, E et F sont six points quelconques. Alors :

$$\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right)+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}+\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}\right)$$

On pourra simplifier l'écriture par :

$$\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right)+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}$$

Une propriété de la somme

A, B et C sont trois points quelconques. On peut calculer :

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)+\overrightarrow{CA}&=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}\\&=\overrightarrow{AA}\end{aligned}$$

On constate que le point A est sa propre image par la translation qui envoie A en A... On définit alors le *vecteur nul* :

$$\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{CC}=\ldots=\overrightarrow{0}$$

Définition 8 – *vecteur nul*

Pour n'importe quel point M : $\overrightarrow{MM}=\overrightarrow{0}$

En particulier :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{0}=\overrightarrow{AB}$$

Propriété 9

Le point I est le milieu du segment $[AB]$ si, et seulement si : $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{0}$.

De façon générale, l'addition vectorielle possède les mêmes propriétés que l'addition des nombres.

Propriété 10

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs, de coordonnées :

$$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v}\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}.$$

Les coordonnées du *vecteur somme* $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ sont :

$$\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}a+p\\b+q\end{pmatrix}$$

Propriété 11 – *coordonnées du vecteur opposé*

$\overrightarrow{u}$ est un vecteur, de coordonnées $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

Le *vecteur opposé de* $\overrightarrow{u}$ est noté $-\overrightarrow{u}$.

Les coordonnées du vecteur $-\overrightarrow{u}$ sont :

$$-\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-a\\-b\end{pmatrix}$$

Définition 9 – *différence*

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs.

On définit le vecteur $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$ par :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v} &= \overrightarrow{u}+(\text{vecteur opposé de}\overrightarrow{v})\\ &= \overrightarrow{u}+(-\overrightarrow{v})\end{aligned}$$

4.5 Exercices

Exercice 1

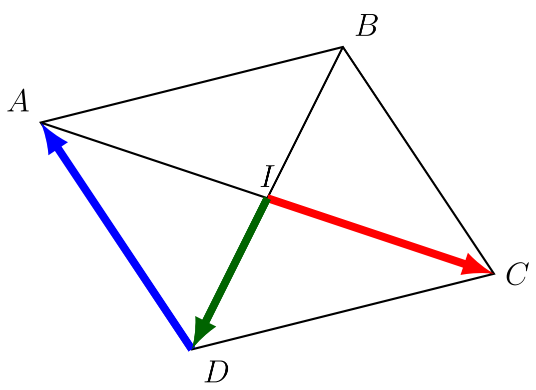
Le quadrilatère $MNRS$ est un carré ; le point T est le symétrique du point R par rapport au point S (la figure est donnée en document annexe).

1. Indiquer les coordonnées de chacun des points O, I et J dans le repère (O, I, J).
2. Relever les coordonnées des points M, N, R, S et T.
3. Relever les coordonnées des points A, E et K.
4. $M_1N_1R_1T_1$ est l'image de $MNRT$ par la translation qui envoie A en E : placer les points M_1, N_1, R_1 et T_1 et donner leurs coordonnées.
5. Reprendre la question précédente avec $M_2N_2R_2T_2$, image de $MNRT$ par la translation qui au point A associe K.
6. Reprendre la question précédente avec $M_3N_3R_3T_3$, image de $MNRT$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AK}$.
7. Reprendre la question précédente avec $M_4N_4R_4T_4$, image de $MNRT$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{KA}$.
8. Tracer et donner la liste de tous les vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{MS}$.

Exercice 2

$ABCD$ est un parallélogramme.

Donner une égalité de deux vecteurs pour chacun des vecteurs de couleur bleu, rouge et vert ci-dessous :



Exercice 3

Dans le repère (O, I, J), on considère les points $E\,(4\,;1{,}5)$ et $R\,(-1\,;3)$.

1. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{RE}$.
2. Construire le point S tel que $\overrightarrow{RE} = \overrightarrow{OS}$.
3. Établir les formules de calcul des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OS}$.
4. Calculer les coordonnées du point S.

Exercice 4

1. Dans un repère (O, I, J), placer les points $A\,(-2{,}5\,;2{,}5)$, $B\,(1\,;1)$ et $C\,(2\,;3{,}5)$.
2. Calculer les coordonnées du point I milieu du segment $[BC]$.
3. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AI}$.
4. En déduire les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{IK}$.
5. En déduire les coordonnées du point K.

Exercice 5

On travaille dans un repère orthonormé (O, I, J).

1. On donne les points $R\,(1\,;3)$ et $T\,(6\,;-2)$.
2. Calculer OR, OT et RT.
3. Démontrer que le triangle TOR est rectangle, et préciser le sommet de l'angle droit.
4. Le point E est le milieu du segment $[RT]$: calculer OE.

Exercice 6

Dans un repère orthonormé (O, I, J), on place les points $S\,(-2\,;2)$, $T\,(3\,;3)$ et $W\,(2\,;-2)$.

Démontrer que le triangle SWT est isocèle, et préciser en quel sommet.

Exercice 7

A, E, P, R sont quatre points.

1. Construire le point V pour que le quadrilatère $PRAV$ soit un parallélogramme.
2. Construire le parallélogramme $PEBV$.
3. Le point I est l'intersection des diagonales de $PRAV$; le point J est l'intersection des diagonales de $PEBV$.
   Démontrer que les droites (ER) et (IJ) sont parallèles.
4. Déduire des questions précédentes la nature précise du quadrilatère $ABER$.

Exercice 8

$ABSR$ est un parallélogramme, P est un point.

1. Construire le point K image du point P par la translation qui envoie A en B (notée $t_{A\to B}$).
2. Préciser la nature du quadrilatère $APKB$.
3. En considérant la conclusion de l'exercice précédent, en déduire la nature du quadrilatère $RPKS$.
4. Quelle est l'image du point P par la translation $t_{R\to S}$?

Exercice 9

On travaille dans un repère (O, I, J).

1. Indiquer les coordonnées de chacun des points O, I et J.
2. Les coordonnées du point A sont $A\,(3\,;-5)$.
   Indiquer la valeur de l'abscisse de A et la valeur de y_A.
3. Les coordonnées du point B sont $A\,(-2\,;-1{,}5)$.
   Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
4. On considère le point $C\,(-5\,;-2)$ et le point D tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
   Calculer les coordonnées de D.
5. On considère le point E tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EC}$.
   Calculer les coordonnées de E.
6. Quelle conjecture peut-on donner pour les points C, D et E ?

Exercice 10

Le repère (O, I, J) est orthonormé. On donne : $A\,(-1\,;-5)$ et $B\,(3\,;2)$.

1. Construire le point H intersection des droites (d) et (u) :
   - la droite (d) est parallèle à l'axe des abscisses et passe par A ;
   - la droite (u) est parallèle à l'axe des ordonnées et passe par B.

   Indiquer les coordonnées du point H.
2. Calculer la longueur du segment $[AH]$.
3. Déterminer BH.
4. Calculer la longueur du segment $[AB]$.

Exercice 11

A, B et C sont trois points non alignés.

1. Construire le point E image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
   Traduire la définition du point E par une égalité de vecteurs.
2. Construire le point F tel que $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AC}$.
3. Construire le point G tel que $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{CE}$.
4. Quelle est la nature du quadrilatère $CBGF$? Justifier.

5 Probabilités

5.1 Expérience aléatoire

- On parle d'*expérience aléatoire* pour désigner une expérience dont on connaît tous les résultats *possibles* mais dont on ne connaît pas le résultat avant de l'avoir effectuée.
- Afin d'être étudiée, une expérience aléatoire est conduite avec un *protocole* : elle doit pouvoir être répétée dans les mêmes conditions.
- On étudie la « chance » de réalisation d'un fait (on dit un *événement*), c'est-à-dire la probabilité de constater ce fait.
- Pour décrire une expérience aléatoire, on emploie le vocabulaire et les notations des *ensembles*.

5.2 Issues et univers d'une expérience aléatoire

Définition 1 – ***issues***

Les résultats possibles d'une expérience aléatoire sont appelés *issues*.

Définition 2 – ***univers***

L'ensemble de toutes les issues est appelé *univers* d'une expérience aléatoire.

L'univers est noté « Ω » (on dit « omega », c'est la vingt-quatrième lettre majuscule de l'alphabet grec).

Chaque issue d'une expérience aléatoire possède une *probabilité* : c'est un nombre compris entre 0 et 1, qui exprime ses chances de réalisation.

Définir un *modèle de probabilité* pour une expérience aléatoire consiste à fixer, pour chaque issue de l'univers, un nombre compris entre 0 et 1, appelé *probabilité de l'issue*, de façon que la somme des probabilités de toutes les issues soit égale à 1.

5.2.1 Définir un modèle par l'observation de la fréquence

On procède par exemple ainsi quand on ne peut pas faire autrement :

On répète de nombreuses fois l'expérience aléatoire ; la fréquence d'apparition d'une issue (pour chaque issue) évolue vers une valeur stable (comprise entre 0 et 1) : c'est cette valeur que l'on prend comme probabilité de l'issue.

5.2.2 Définir un modèle par une détermination théorique

On peut parfois donner un modèle théorique, en particulier lorsque *toutes les issues ont les mêmes chances de réalisation*; on parle d'*équiprobabilité*.

Propriété 1

Dans le modèle d'équiprobabilité, si l'univers Ω possède n issues, alors la probabilité de chaque issue est égale à $\frac{1}{n}$.

Propriété 2 – *probabilité*

La probabilité d'une issue (ou d'un événement) vérifie deux propriétés :

- une probabilité est un nombre compris entre 0 et 1 ;
- la somme des probabilités de toutes les issues d'un univers est toujours égale à 1.

5.3 Événements

Définition 3 – *événement*

Un *événement* est composé d'une ou plusieurs (éventuellement aucune) issues de l'univers.

Propriété 3 – *probabilité d'un événement*

La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités des issues qui le composent.

La probabilité d'un événement A est souvent notée $P(A)$.

Définition 4 – *événement certain*

Un *événement certain* est un événement toujours réalisé.

La probabilité d'un événement certain est 1.

Définition 5 – *événement contraire*

L'*événement contraire* d'un événement A est l'événement réalisé lorsque A n'est pas réalisé. On le note $\overline{A}$ (lu « A barre »).

Définition 6 – *événements incompatibles*

On dit que deux événements sont *incompatibles* lorsqu'ils ne peuvent être réalisés simultanément.

Deux événements contraires sont incompatibles.

Propriété 4

On considère A et B deux événements de l'univers Ω d'une expérience aléatoire.

Alors :

$$P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$$

On en déduit deux égalités :

- la probabilité de l'événement « A ou B » :
- la probabilité de l'événement « A et B » :

Propriété 5

Soit A un événement de l'univers Ω d'une expérience aléatoire.

Alors :

$$P(A) + P\left(\overline{A}\right) = 1$$

6 Colinéarité

6.1 Produit d'un vecteur par un réel

Définition 1 – *produit d'un vecteur par un réel*

$\vec{u}$ est un vecteur et λ est un nombre réel.

Le vecteur noté $\lambda\,\vec{u}$ est appelé *produit du vecteur $\vec{u}$ par le nombre λ*; le vecteur $\lambda\,\vec{u}$ est défini par :

$$\lambda\,\vec{u}\begin{pmatrix}\lambda\,a\\ \lambda\,b\end{pmatrix}$$

où $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$ désigne les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans un repère du plan.

On démontre que les coordonnées du vecteur $\lambda\,\vec{u}$ ne dépendent pas du repère choisi, mais elles dépendent uniquement des coordonnées du vecteur $\vec{u}$ et de la valeur de λ.

Propriété 1

$\vec{u}$ est un vecteur non nul ($\vec{u} \neq \vec{0}$).

1. $\vec{u}$ et $\lambda\,\vec{u}$ ont le même sens si, et seulement si, $\lambda > 0$;
2. $\vec{u}$ et $\lambda\,\vec{u}$ sont de sens opposés si, et seulement si, $\lambda < 0$.

Le produit d'un vecteur par un nombre possède diverses propriétés :

Propriété 2

α et β sont deux réels, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs.

1. $(\alpha+\beta)\ \vec{u} = \alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{u}$;
2. $\alpha\,(\beta\,\vec{u}) = (\alpha\beta)\ \vec{u}$;
3. $\alpha\,(\vec{u}+\vec{v}) = \alpha\,\vec{u} + \alpha\,\vec{v}$.

6.2 Vecteurs colinéaires

Définition 2 – *vecteurs colinéaires*

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *colinéaires* lorsqu'il existe un nombre réel λ tel que : $\vec{u} = \lambda\,\vec{v}$.

En particulier, le vecteur nul est colinéaire à n'importe quel autre vecteur.

Propriété 3

Dans un repère, deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles.

Autrement dit :

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si :

$$x \times b = y \times a$$

Propriété 4 – *colinéarité et parallélisme*

Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Propriété 5 – *colinéarité et alignement*

Trois points A, B et C sont alignés si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Propriété 6 – *appartenance d'un point à une droite*

Un point M appartient à une droite (AB) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.

Définition 3 – *vecteur directeur*

On dit que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un *vecteur directeur* de la droite (AB).

N'importe quel vecteur non nul et colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$ est aussi un vecteur directeur de la droite (AB).

7 Fonctions usuelles

7.1 Fonctions du second degré

Définition 1 – ***fonction polynôme du second degré***

a, b et c sont trois nombres réels ; *a est non nul*.

La fonction f définie par :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & a\,x^2 + b\,x + c \end{array}$$

est appelée *fonction polynôme du second degré*.

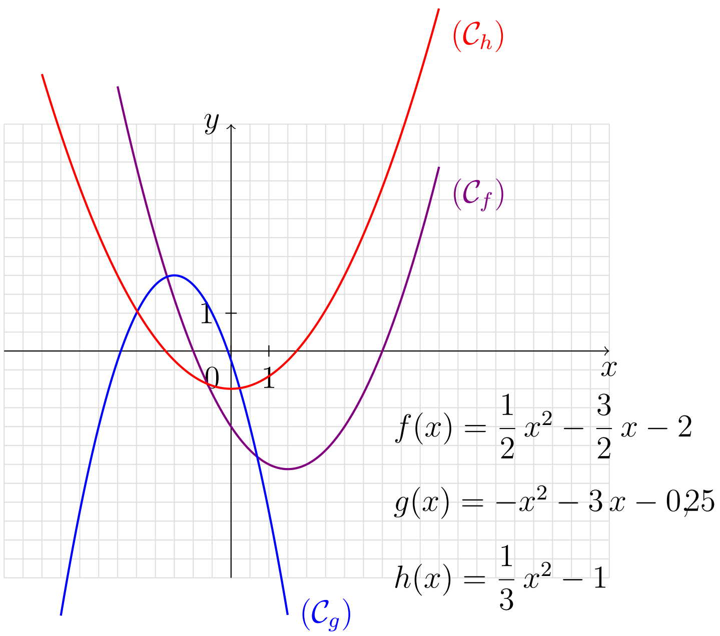
Exemple :

Une fonction dont l'expression est $f(x) = -3\,(x-7)^2 + 5$ est une fonction polynôme du second degré.

Propriété 1 – ***représentation graphique***

La représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré est une *parabole* :

- pour $a > 0$, la parabole « pointe vers le haut » (courbe en « $\cup$ ») ;
- pour $a < 0$, la parabole « pointe vers le bas » (courbe en « $\cap$ »).

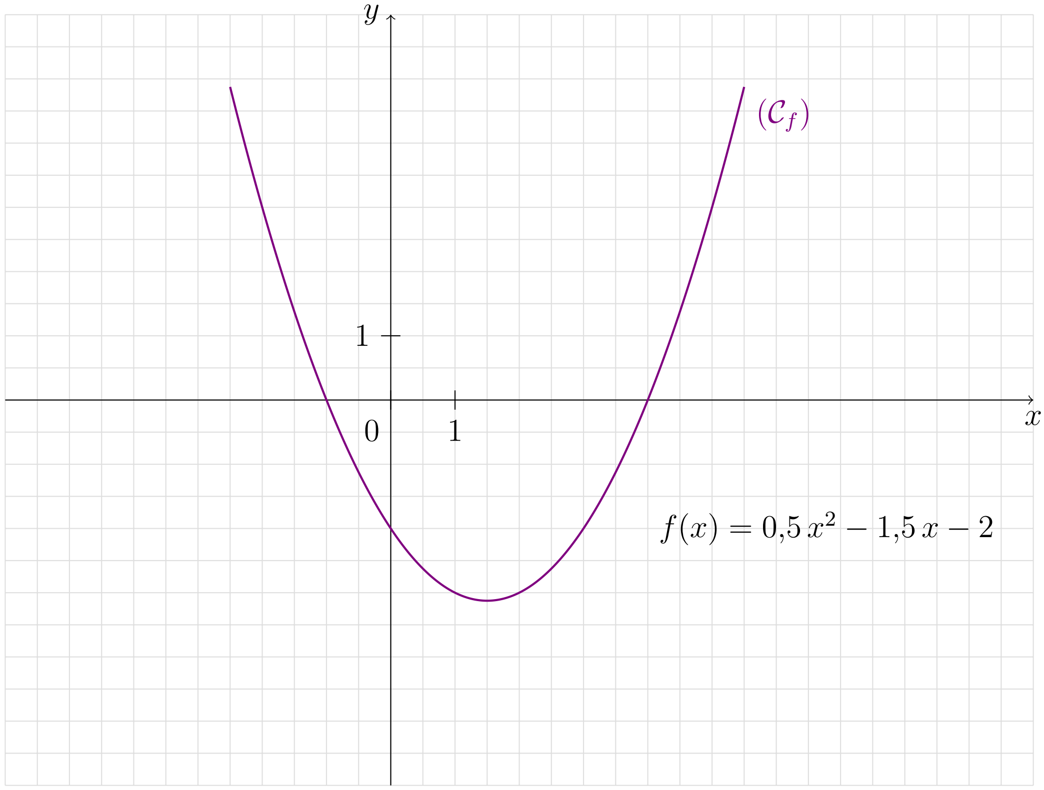


Propriété 2 – *« sommet » d'une parabole*

La parabole représentant une fonction f polynôme du second degré possède un « sommet », dont l'abscisse est le nombre $\dfrac{-b}{2a}$:

- pour $a > 0$, le sommet est le point de la parabole *d'ordonnée minimale*;
- pour $a < 0$, le sommet est le point de la parabole *d'ordonnée maximale*.

L'ordonnée du sommet est égale à $f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)$.



Propriété 3 – *axe de symétrie*

La parabole qui représente une fonction polynôme du second degré possède un axe de symétrie, parallèle à l'axe des ordonnées, et qui passe par le sommet de la parabole.

Propriété 4 – *variations d'une fonction du second degré*

f est une fonction polynôme du second degré ayant pour sommet un point *d'abscisse* α :

- pour $a > 0$, la fonction est décroissante sur $]-\infty\,;\,\alpha]$ et croissante sur $[\alpha\,;\,+\infty[$;
- pour $a < 0$, la fonction est croissante sur $]-\infty\,;\,\alpha]$ et décroissante sur $[\alpha\,;\,+\infty[$.

7.2 La fonction « inverse »

Définition 2 – *fonction inverse*

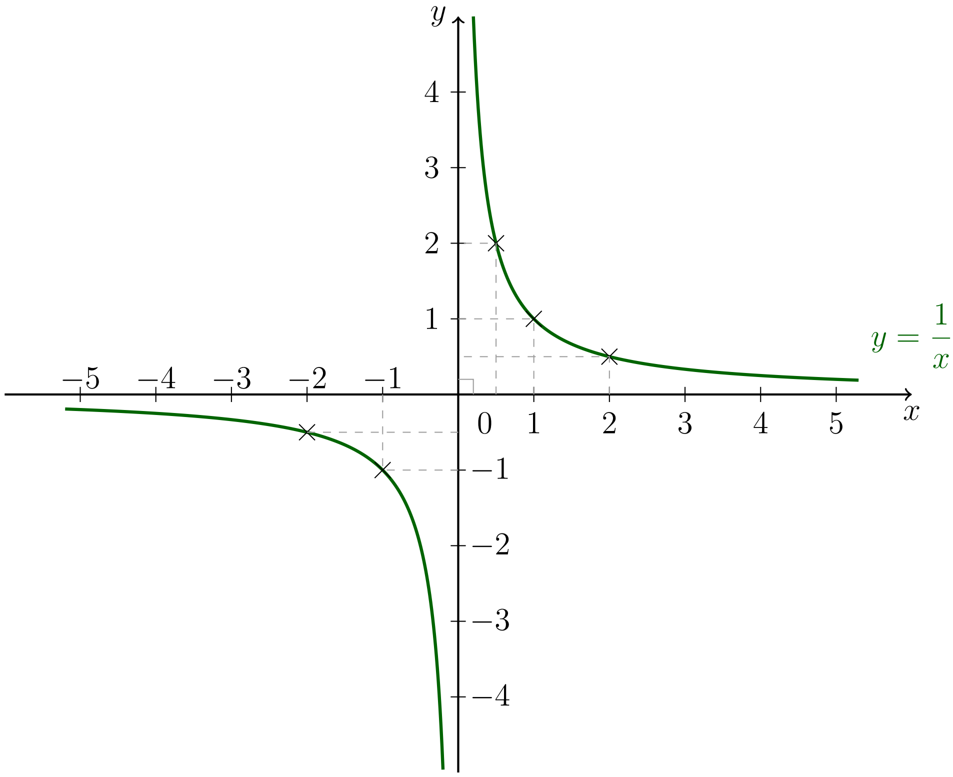
La fonction « inverse » est définie par :

$$\begin{array}{ccc}]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$

La fonction inverse est représentée par une courbe appelée « *hyperbole* ».

Propriété 5 – *variations*

1. La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$.
2. La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.



8 Droites et systèmes

A Divers

A.1 Quelques programmes

On propose ici quelques programmes avec deux objectifs :

— pour chacune des familles de calculatrices *CASIO* et *Texas-Instruments*, montrer quelques exemples de programmes : ils pourront servir pour retrouver la syntaxe de quelques instructions de chaque langage ;

— les programmes présentés ont tous un intérêt mathématique dans le cadre des programmes du lycée. Ils pourront donc être utiles selon les chapitres abordés en classe.

A.1.1 Simulation

On présente ci-dessous une simulation à la calculette de l'expérience aléatoire suivante :

« Une urne contient un certain nombre de billes, toutes bleues ou rouges et indiscernables. On tire une bille, on note sa couleur, puis on la remet dans l'urne. On recommence plusieurs fois l'expérience. Le jeu consiste à deviner le nombre de billes de chaque couleur dans l'urne. »

Programme pour CASIO GRAPH 35+	Programme pour TI-82 Plus
"BILLES "? → N ↵	: Input "BILLES ? ", N
RanInt#(1, n) → B ↵	: nbrAléaEnt(1, n) → B
N - B → R ↵	: N - B → R
"TIRAGES "? → T ↵	: Input "TIRAGES ? ", T
0 → U ↵	: 0 → U
0 → V ↵	: 0 → V
0 → I ↵	: 0 → I
While I < T ↵	: While I < T
RanInt#(1, n) → A ↵	: nbrAléaEnt(1, n) → A
If A ⩽ B ↵	: If A ⩽ B
Then ↵	: Then
U + 1 → U ↵	: U + 1 → U
Else ↵	: Else
V + 1 → V ↵	: V + 1 → V
IfEnd ↵	: End
I + 1 → I ↵	: I + 1 → I
WhileEnd ↵	: End
"BLEUES TIREES :" ↵	: Disp "BLEUES TIREES :", U
U ◢	: Disp "ROUGES TIREES :", V
"ROUGES TIREES :" ↵	: Input "DEVINEZ PUIS VALIDEZ", Z
V ◢	: Disp "BLEUES DANS L'URNE :", B
"DEVINEZ PUIS VALIDEZ" ↵	: Disp "ROUGES DANS L'URNE :", R
"BLEUES DANS L'URNE :" ↵	
B ◢	
"ROUGES DANS L'URNE :" ↵	
R ◢	

A.1.2 Division euclidienne

A et B sont deux nombres entiers naturels, B est non nul.

Le programme suivant calcule le *reste* R dans la *division euclidienne* (division entière), selon l'égalité :

$$A = B \times Q + R$$

où Q et R sont des entiers, avec : $0 \leqslant R < B$.

Programme pour CASIO GRAPH 35+	**Programme pour TI-82 Plus**
"A="? → A ↵	: Input "A=", A
"B="? → B ↵	: Input "B=", B
While A ⩾ B ↵	: While A ⩾ B
(A - B) → A ↵	: (A - B) → A
WhileEnd ↵	: End
"RESTE" ↵	: Disp "RESTE"
R	: Disp R

Le programme suivant calcule le *quotient (entier)* Q dans la division euclidienne du nombre entier naturel A par le nombre entier naturel non nul B :

Programme pour CASIO GRAPH 35+	**Programme pour TI-82 Plus**
"A="? → A ↵	: Input "A=", A
"B="? → B ↵	: Input "B=", B
0 → Q ↵	: 0 → Q
While A ⩾ B ↵	: While A ⩾ B
(A - B) → A ↵	: (A - B) → A
Q + 1 → Q ↵	: Q + 1 → Q
WhileEnd ↵	: End
"QUOTIENT" ↵	: Disp "QUOTIENT"
Q	: Disp Q

Remarque :

Le programme calculant le quotient s'obtient à partir du programme qui calcule le reste, en ajoutant 1 au quotient à chaque soustraction du dividende par le diviseur (en dehors des instructions d'affichage).

A.1.3 PGCD : Plus Grand Commun Diviseur

A et B sont deux nombres entiers naturels.

Le programme principal *PGCD* appelle le sous-programme *RESTE2* pour calculer le reste dans la division euclidienne de A par B, en partageant les informations dans les variables C et D.

Les deux programmes suivants concernent les calculatrices **CASIO**.

☞ **Le sous-programme RESTE2**

Programme pour CASIO GRAPH 35+
While C ⩾ D ↲
C - D → C ↲
WhileEnd ↲
Return ↲

☞ **Le programme PGCD**

Programme pour CASIO GRAPH 35+
"A="? → A ↲
"B="? → B ↲
While B > 0 ↲
A → C ↲
B → D ↲
Prog "RESTE2" ↲
B → A ↲
C → B ↲
WhileEnd ↲
"PGCD" ↲
A

Les deux programmes suivants concernent les calculatrices **Texas-Instruments**.

☞ **Le sous-programme RESTE2**

Programme pour TI-82 Plus
: While C ⩾ D
: C - D → D
: End

☞ **Le programme PGCD**

Programme pour TI-82 Plus
: Input "A=", A
: Input "B=", B
: While B > 0
: A → C
: B → D
: prgmRESTE2
: B → A
: C → B
: End
: Disp "PGCD"
: Disp A

A.1.4 Partie entière

On considère un nombre flottant noté X (c'est-à-dire, pour les nombres d'une calculatrice ou d'un ordinateur, un nombre qui peut *ne pas* être entier).

Le programme suivant calcule la partie entière de X :

Programme pour CASIO GRAPH 35+	**Programme pour TI-82 Plus**
"X="? → X ↲	: Input "X=", X
0 → N ↲	: 0 → N
If X $\geqslant$ 0 ↲	: If X $\geqslant$ 0
While N + 1 $\leqslant$ X ↲	: Then
N + 1 → N ↲	: While N + 1 $\leqslant$ X
WhileEnd ↲	: N + 1 → N
N ↲	: End
Else ↲	: Disp N
While N > X ↲	: Else
N - 1 → N ↲	: While N > X
WhileEnd ↲	: N - 1 → N
N ↲	: End
IfEnd ↲	: Disp N
	: End

Remarque importante

Il faut savoir que les constructeurs de calculatrices appellent « partie entière » les fonctions `Int` (pour les calculatrices CASIO) et `ent` (calculatrices Texas-Instruments), mais celles-ci ne sont pas exactement la partie entière en Mathématiques.

En effet, les concepteurs de calculatrices appellent « partie entière » la *troncature à l'unité* ; pour les nombres positifs, on obtient dans les deux cas la même valeur, mais pour les nombres négatifs, on obtient deux valeurs distinctes pour les nombres non entiers négatifs ! ! !

On peut le constater sur quelques exemples :

nombre	partie entière mathématique	troncature à l'unité
1,414	1	1
-6	-6	-6
$-3{,}14$	-4	-3

La définition mathématique de la partie entière vérifie la propriété :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$$

où la notation $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du nombre réel x.

L'algorithme à l'origine du programme précédent est :

Données :
X un nombre réel
Résultat :
N un nombre entier relatif (égal à la partie entière de X)
Traitement
choisir la valeur de X
fixer la valeur de N à 0
si $X \geqslant 0$ **alors**
tant que $N+1 \leqslant X$ **faire**
fixer la valeur de N à $(N+1)$
fin tq
sinon
tant que $N > X$ **faire**
fixer la valeur de N à $(N-1)$
fin tq
fin si
retourner N
Fin du traitement