

# Mathématiques

Pascal CHAUVIN

# 2<sup>nde</sup>

13 octobre 2018



Paternité

Pas d'utilisation commerciale

Partage des conditions initiales à l'identique

[Licence Creative Commons 2.0 France](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.0/fr/)



# TABLE DES MATIÈRES

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Rappels</b>  | <b>5</b>  |
| 1.1      | Pourcentages : augmentation, diminution                                       | 5         |
| 1.1.1    | Augmenter de $k$ %  | 5         |
| 1.1.2    | Diminuer de $k$ %   | 5         |
| 1.1.3    | Retrouver un pourcentage d'augmentation ou diminution                         | 6         |
| 1.2      | Résolution des équations  | 6         |
| <b>2</b> | <b>Fonctions</b>  | <b>7</b>  |
| 2.1      | La droite réelle  | 7         |
| 2.2      | Vocabulaire et notations  | 8         |
| 2.2.1    | Ensemble de définition  | 9         |
| 2.2.2    | Variations  | 10        |
| <b>3</b> | <b>Géométrie repérée</b>  | <b>11</b> |
| 3.1      | Coordonnées d'un point dans un repère   | 11        |
| 3.2      | Coordonnées du milieu d'un segment  | 12        |
| 3.3      | Longueur d'un segment, distance entre deux points                             | 12        |
| <b>4</b> | <b>Statistiques</b>   | <b>13</b> |
| 4.1      | Effectifs et fréquences   | 13        |
| 4.2      | Moyenne   | 14        |
| 4.3      | Médiane et quartiles  | 15        |
| <b>5</b> | <b>Fonctions affines</b>  | <b>17</b> |
| 5.1      | Fonction affine. Fonction linéaire  | 17        |
| 5.2      | Représentation graphique  | 17        |
| 5.2.1    | Interprétation du coefficient directeur et de l'ordonnée à l'origine          | 18        |
| 5.2.2    | Détermination graphique du coefficient directeur et de l'ordonnée à l'origine | 19        |
| 5.3      | Variations  | 19        |
| 5.4      | Signe de $ax + b$   | 20        |
| <b>6</b> | <b>Translations et vecteurs</b>   | <b>21</b> |
| 6.1      | Translation   | 21        |
| 6.2      | Vecteur   | 22        |
| 6.2.1    | Vecteurs égaux et milieu d'un segment   | 23        |
| 6.3      | Coordonnées d'un vecteur  | 24        |
| 6.4      | Somme de deux vecteurs  | 25        |
| 6.5      | Exercices   | 29        |
| <b>7</b> | <b>Probabilités</b>   | <b>33</b> |
| 7.1      | Expérience aléatoire  | 33        |
| 7.2      | Issues et univers d'une expérience aléatoire                                  | 33        |
| 7.2.1    | Définir un modèle par l'observation de la fréquence                           | 33        |
| 7.2.2    | Définir un modèle par une détermination théorique                             | 34        |
| 7.3      | Événements  | 34        |

---

|           |   |           |
|-----------|---|-----------|
| <b>8</b>  | <b>Colinéarité</b>                          | <b>37</b> |
| 8.1       | Produit d'un vecteur par un réel . . . . .  | 37        |
| 8.2       | Vecteurs colinéaires . . . . .              | 38        |
| <b>9</b>  | <b>Fonctions usuelles</b>                   | <b>39</b> |
| 9.1       | Fonctions du second degré . . . . .         | 39        |
| 9.2       | La fonction « inverse » . . . . .           | 41        |
| <b>10</b> | <b>Droites et systèmes</b>                  | <b>43</b> |
| <b>A</b>  | <b>Divers</b>                               | <b>45</b> |
| A.1       | Quelques programmes . . . . .               | 45        |
| A.1.1     | Simulation . . . . .                        | 46        |
| A.1.2     | Division euclidienne . . . . .              | 47        |
| A.1.3     | PGCD : Plus Grand Commun Diviseur . . . . . | 49        |
| A.1.4     | Partie entière . . . . .                    | 51        |

## 1.1 Pourcentages : augmentation, diminution

### 1.1.1 Augmenter de $k$ %

On considère l'exemple suivant : augmenter 5 kg de 12 %. On calcule d'abord l'augmentation représentée par 12 %, puis la nouvelle masse (après augmentation) :

|                   |     |   |
|-------------------|-----|---|
| masse (kg)        | 100 | 5 |
| augmentation (kg) | 12  |   |

L'augmentation est calculée dans ce tableau de proportionnalité, par :  $\frac{12 \times 5}{100} = 0,6$ .

La nouvelle masse est ensuite calculée par :  $5 + \frac{12 \times 5}{100} = 5 + 0,6$  ; *c.-à-d.* 5,6 kg.

On retiendra :

$$\begin{aligned} 5 + \frac{12 \times 5}{100} &= 5 + 0,12 \times 5 \\ &= 1 \times 5 + 0,12 \times 5 \\ &= (1 + 0,12) \times 5 \\ &= 1,12 \times 5 \end{aligned}$$

Pour augmenter 5 kg de 12 %, il suffit de multiplier 5 kg par 1,12.

### Propriété 1 – calcul rapide de la valeur augmentée



Pour augmenter un nombre de  $k$  %, il suffit de le multiplier par  $\left(1 + \frac{k}{100}\right)$ .

### 1.1.2 Diminuer de $k$ %

On considère l'exemple suivant : diminuer 5 kg de 12 %. On calcule d'abord la diminution représentée par 12 %, puis la nouvelle masse (après diminution) :

|                 |     |   |
|-----------------|-----|---|
| masse (kg)      | 100 | 5 |
| diminution (kg) | 12  |   |

La diminution est calculée dans ce tableau de proportionnalité, par :  $\frac{5 \times 12}{100} = 0,6$ .

La nouvelle masse est ensuite calculée par :  $5 - \frac{12 \times 5}{100} = 5 - 0,6$  ; *c.-à-d.* 4,4 kg.

On retiendra :

$$\begin{aligned} 5 - \frac{12 \times 5}{100} &= 5 - 0,12 \times 5 \\ &= 1 \times 5 - 0,12 \times 5 \\ &= (1 - 0,12) \times 5 \\ &= 0,88 \times 5 \end{aligned}$$

Pour diminuer 5 kg de 12 %, il suffit de multiplier 5 kg par 0,88.

**Propriété 2 – calcul rapide de la valeur diminuée**

Pour diminuer un nombre de  $k$  %, il suffit de le multiplier par  $\left(1 - \frac{k}{100}\right)$ .

**1.1.3 Retrouver un pourcentage d'augmentation ou diminution**

On considère l'exemple suivant : lors d'une augmentation, une grandeur passe de 5 kg à 6 kg ; quel est le pourcentage d'augmentation de 5 kg ?

L'augmentation est calculée par :  $6 - 5 = 1$  kg pour une valeur initiale de 5 kg. On en déduit la proportionnalité suivante :

|                   |   |     |
|-------------------|---|-----|
| masse (kg)        | 5 | 100 |
| augmentation (kg) | 1 |     |

L'augmentation pour 100 kg est calculée par :  $\frac{1 \times 100}{5} = 20$ .

Le pourcentage d'augmentation est 20 %.

**1.2 Résolution des équations**

Pour résoudre une équation, on emploie souvent quelques-unes des propriétés suivantes :

**Propriété 3**

Les lettres  $a$ ,  $b$  et  $k$  désignent trois nombres.

1. Si  $a = b$ , alors  $a + k = b + k$  ;
2. Si  $a = b$ , alors  $a - k = b - k$  ;
3. Si  $a = b$ , alors  $a \times k = b \times k$  ;
4. Si  $a = b$  et  $k \neq 0$ , alors  $\frac{a}{k} = \frac{b}{k}$  ;

**Exemple 1** Résoudre l'équation :  $3,5 \times x = 28$ .

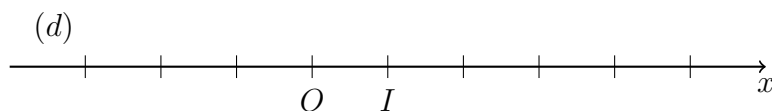
**Exemple 2** Résoudre l'équation :  $12 \times x + 4,38 = 15 \times x$ .

## 2.1 La droite réelle

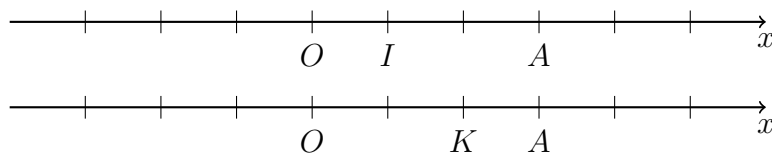
La droite  $(d)$  est munie d'un repère  $(O, I)$ .

Les points  $O$  et  $I$  ont comme coordonnées :  $O(0)$  et  $I(1)$ .

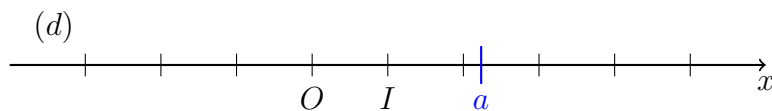
Dans le repère  $(O, I)$ , l'abscisse du point  $O$  est 0 et l'abscisse du point  $I$  est 1.



Dire que l'abscisse d'un point  $A$  dans le repère  $(O, I)$  est 3 signifie que la position de  $A$  *relativement aux points  $O$  et  $I$*  est donnée par le nombre 3.



- Dans le repère  $(O, I)$ , l'abscisse du point  $A$  est ...
- Dans le repère  $(O, K)$ , l'abscisse du point  $A$  est ...



Pour n'importe quel **nombre  $a$** , il existe un point de la droite  $(OI)$  dont l'abscisse est  $a$  dans le repère  $(O, I)$ .

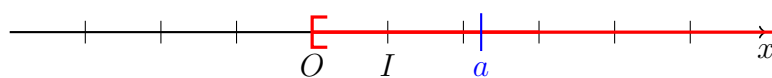
### Définition 1 – ensemble $\mathbb{R}$



- L'ensemble des **nombre réels** (les nombres) est noté  $\mathbb{R}$ .
- La droite qui représente  $\mathbb{R}$  est appelée **droite réelle**.

La phrase : «  $\sqrt{7}$  est un nombre réel. »

s'écrit symboliquement : «  $\sqrt{7} \in \mathbb{R}$  »

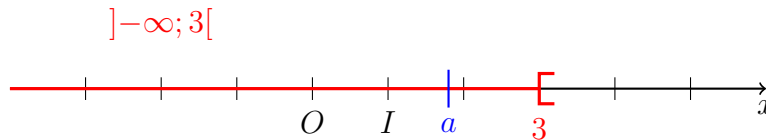


La demi-droite  $[Ox)$  représente l'ensemble  $\mathbb{R}^+$  de tous les nombres positifs. On écrit :

- $a \geq 0$ .
- $a \in \mathbb{R}^+$ .
- $a \in [0; +\infty[$ .

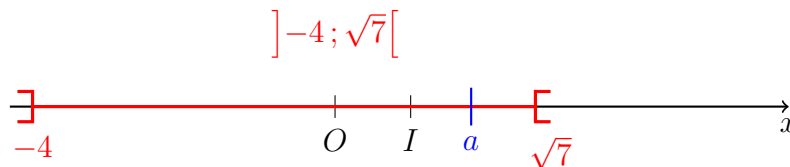
La notation «  $+\infty$  » est lue « plus l'infini ».

On définit aussi la notation  $\mathbb{R}^-$  par ...



On peut exprimer qu'un nombre  $a$  appartient à l'ensemble des nombres strictement plus petits que 3 par :

- $a \in ]-\infty; 3[$ .
- $a < 3$ .



On peut exprimer qu'un nombre  $a$  appartient à l'ensemble des nombres strictement plus grands que  $-4$  et strictement plus petits que  $\sqrt{7}$  par :

- $a \in ]-4; \sqrt{7}[$ .
- $-4 < a$  et  $a < \sqrt{7}$ .

On peut résumer les deux inégalités par :  $-4 < a < \sqrt{7}$ .

Exercice : représenter, sur trois dessins distincts, chacun des ensembles  $[-4; \sqrt{7}]$  ;  $] -4; \sqrt{7} ]$  ;  $[-4; \sqrt{7} [$ .

### Définition 2 - intervalle de $\mathbb{R}$

Les ensembles :

$$]-4; \sqrt{7}[ ; [-4; \sqrt{7}] ; ]-4; \sqrt{7}] ; [-4; \sqrt{7}[$$

sont appelés *intervalles de  $\mathbb{R}$* .

Ces intervalles ont comme *extrémités* (on dit aussi *bornes*) les nombres  $-4$  et  $\sqrt{7}$ .

## 2.2 Vocabulaire et notations

Voici un exemple de définition d'une fonction mathématique  $f$  :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (3x + 1)^2 \end{aligned}$$

Dans cet exemple :



- $f$  est une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  (c.-à-d. pour n'importe quel nombre réel);
- la *valeur de  $f$  pour le nombre  $x$*  est un nombre réel.  
Ce nombre est appelé *image de  $x$*  et il est noté  $f(x)$  :

$$f(x) = (3x + 1)^2 .$$

On peut calculer, pour plusieurs nombres réels, l'image de chacun d'eux par  $f$ . Par exemple :

$$f(0) ; \quad f(-1) ; \quad f(3) ; \quad f\left(\frac{-2}{3}\right) \dots$$

On peut regrouper ces images dans un *tableau de valeurs* :

|                  |     |     |     |                |     |
|------------------|-----|-----|-----|----------------|-----|
| Valeur de $x$    | 0   | -1  | 3   | $\frac{-2}{3}$ | ... |
| Valeur de $f(x)$ | ... | ... | ... | ...            | ... |

- L'image de 1 par  $f$  est 16 :  $f(1) = 16$ .  
On dit aussi que le nombre 1 est un *antécédent* de 16 pour la fonction  $f$ .
- Les nombres 0 et  $\frac{-2}{3}$  ont la même image par  $f$  :

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad f\left(\frac{-2}{3}\right) = 1 .$$

- Le nombre  $-4$  ne possède pas d'antécédent pour la fonction  $f$ .  
En effet, pour n'importe quel nombre  $x$ , on a :

$$(3x + 1)^2 \geq 0 \quad \text{et} \quad 0 > -4 .$$

Donc  $(3x + 1)^2$  ne peut pas être égal à  $-4$ .

## 2.2.1 Ensemble de définition

### Définition 3 – ensemble de définition



On appelle *ensemble de définition* d'une fonction, l'ensemble de tous les nombres qui ont une image par la fonction  $f$ .

### Définition 4 – représentation graphique

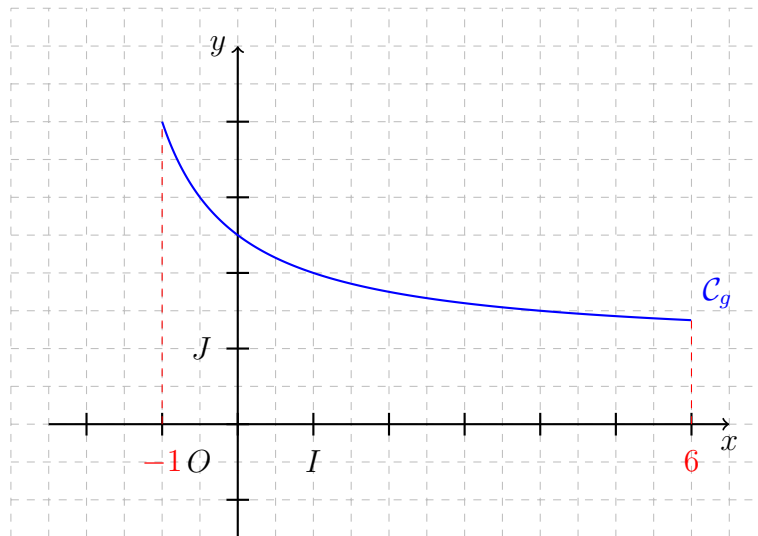


On considère un repère orthonormé  $(O, I, J)$ .

On appelle *représentation graphique* d'une fonction  $f$ , l'ensemble des points  $M$  de coordonnées  $M(x; f(x))$  lorsque  $x$  prend toutes les valeurs possibles dans l'ensemble de définition de  $f$ .

On dit aussi *courbe représentative* de  $f$ .

Un exemple de représentation graphique : une fonction  $g$  définie sur  $\mathcal{D}_g = [-1; 6]$ .



### 2.2.2 Variations

On considère une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $I$ .

#### Définition 5 – fonction croissante



On dit que la fonction  $f$  est *croissante* sur  $I$  lorsque :

Pour n'importe quels nombres  $a$  et  $b$  de  $I$  :

$$\text{Si } a < b \text{ alors } f(a) \leq f(b).$$

On considère une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $I$ .

#### Définition 6 – fonction strictement croissante



On dit que la fonction  $f$  est *strictement croissante* sur  $I$  lorsque :

Pour n'importe quels nombres  $a$  et  $b$  de  $I$  :

$$\text{Si } a < b \text{ alors } f(a) < f(b).$$

Écrire les définitions de :

- *fonction décroissante*;
- *fonction strictement décroissante*.

#### Définition 7 – tableau de variations



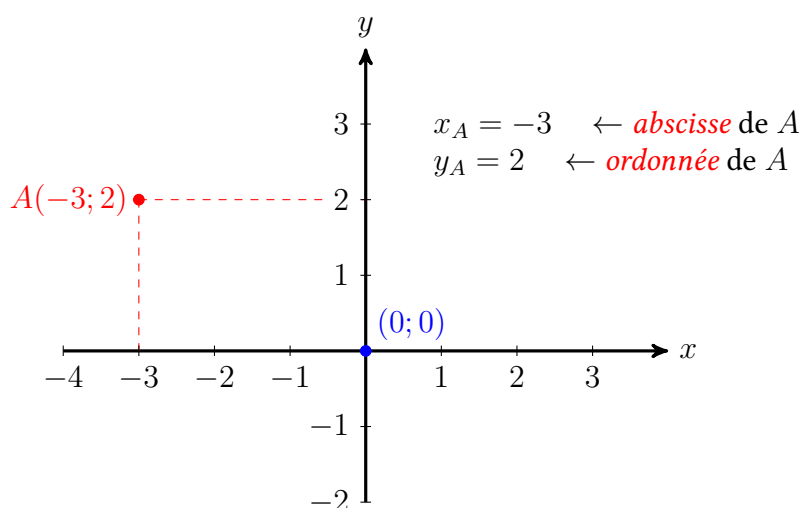
Lorsqu'on étudie une fonction, on regroupe dans un *tableau de variations* les informations :

- son ensemble de définition;
- ses variations;
- les valeurs de quelques images.

## 3 GÉOMÉTRIE REPÉRÉE

### 3.1 Coordonnées d'un point dans un repère

On rappelle la notation des coordonnées d'un point  $A(-3; 2)$  dans un *repère du plan* :

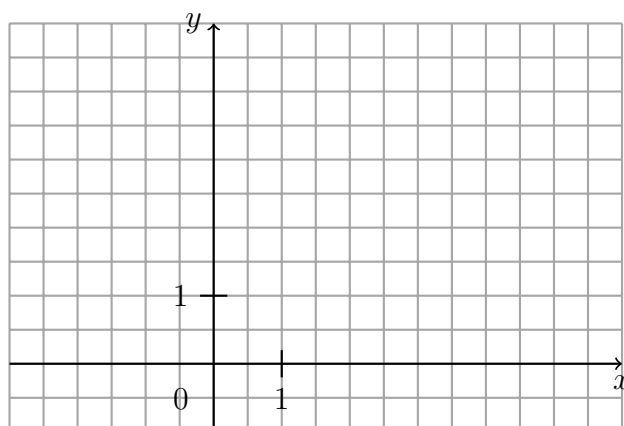


#### Définition 1 – repère orthonormé



On dit qu'un repère est un *repère orthonormé* lorsque :

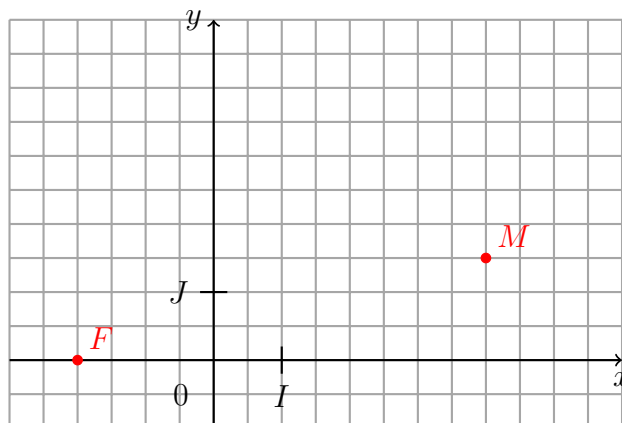
- l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées sont perpendiculaires ;
- l'unité de l'axe des abscisses et l'unité de l'axe des ordonnées sont deux segments de même longueur.



On emploie souvent la notation  $(O, I, J)$ , qui signifie que :

- le point  $O$  possède une abscisse égale à 0 sur chacun des axes  $(Ox)$  et  $(Oy)$ ;
- le point  $I$  possède une abscisse de 1 sur l'axe  $(Ox)$ ;
- le point  $J$  possède une abscisse de 1 sur l'axe  $(Oy)$ .

*Attention à ne pas confondre « coordonnée sur une droite : un nombre réel » et « coordonnées dans un repère (du plan) : un couple de deux nombres réels »!*



## 3.2 Coordonnées du milieu d'un segment

### Propriété 1 – coordonnées du milieu

Si le point  $T$  est le milieu du segment  $[AB]$ , alors les coordonnées du point  $T$  vérifient les égalités :

$$x_T = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{et} \quad y_T = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Autrement dit, l'abscisse du milieu d'un segment est égale à la demi-somme des abscisses des extrémités du segment (et il en est de même pour les ordonnées).

## 3.3 Longueur d'un segment, distance entre deux points

### Propriété 2 – longueur d'un segment

$A$  et  $B$  sont deux points.

La longueur du segment  $[AB]$  est calculée par :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

## 4.1 Effectifs et fréquences

On considère une série statistique à caractère numérique :

|                     |       |       |         |       |
|---------------------|-------|-------|---------|-------|
| valeur du caractère | $x_1$ | $x_2$ | $\dots$ | $x_p$ |
| effectif            | $n_1$ | $n_2$ | $\dots$ | $n_p$ |

- ☞ La série possède  $p$  valeurs distinctes du caractère.
- ☞ En pratique, on organise le tableau en classant les valeurs  $x_i$  par ordre croissant :

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_p.$$

### Définition 1 – effectifs et effectif total

Le nombre noté  $n_i$  est appelé *effectif* de la valeur  $x_i$ .

La somme des effectifs de toutes les valeurs du caractère est appelée *effectif total* de la série ; si on note  $N$  l'effectif total :

$$N = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_p.$$

### Définition 2 – fréquence d'un caractère

On appelle *fréquence* de la valeur  $x_i$ , notée  $f_i$ , le quotient de l'effectif de la valeur  $x_i$  par l'effectif total :

$$f_i = \frac{n_i}{n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_p} = \frac{n_i}{N}$$

- La fréquence d'une valeur du caractère est un nombre de l'intervalle  $[0; 1]$ .
- On peut choisir d'exprimer la fréquence d'une valeur en pourcentage.

### Définition 3 – effectif cumulé croissant

L'*effectif cumulé croissant* de la valeur  $x_i$  est la somme des effectifs pour toutes les valeurs du caractère inférieures ou égales à  $x_i$  :

$$n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_i$$

De manière analogue, on définit la fréquence cumulée croissante :

#### Définition 4 – fréquence cumulée croissante



La *fréquence cumulée croissante* est la somme des fréquences des valeurs du caractère inférieures ou égales à  $x_i$  :

$$f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_i$$

#### Propriété 1



La *fréquence cumulée croissante* du caractère  $x_i$  est égale au quotient de l'effectif cumulé croissant de la valeur  $x_i$  par l'effectif total :

$$\frac{n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_i}{n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_p} = \frac{n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_i}{N}$$

## 4.2 Moyenne

#### Définition 5 – moyenne



La *moyenne* de la série statistique, notée  $\bar{x}$ , est le nombre défini par :

$$\bar{x} = \frac{n_1 \times x_1 + n_2 \times x_2 + \dots + n_p \times x_p}{n_1 + n_2 + \dots + n_p}$$

La moyenne est un *indicateur de position*.

#### Propriété 2



On a l'égalité :

$$\bar{x} = f_1 \times x_1 + f_2 \times x_2 + \dots + f_p \times x_p$$

Cette propriété permet donc de calculer la moyenne d'une série statistique à l'aide des fréquences.

#### Remarque :

La définition précédente de la moyenne est convient pour les séries à *caractère discret*, dont les valeurs sont isolées (c.-à-d. peu nombreuses).

Cette définition peut aussi être appliquée aux séries à *caractère continu* : dans ce cas, les valeurs sont regroupées en *classes*, puis on considère que la valeur du caractère est le *centre* de chaque classe.

## 4.3 Médiane et quartiles

### Définition 6 – médiane



Une *médiane* d'une série statistique est un nombre noté  $M_e$ , pour lequel :

- au moins 50 % des valeurs sont inférieures ou égales à  $M_e$  ;
- au moins 50 % des valeurs sont supérieures ou égales à  $M_e$ .

Une médiane est un *indicateur de position*.

En pratique, on détermine une médiane de la façon suivante :

- Pour un effectif total **impair**, on prend comme médiane la valeur « centrale » du caractère.
- Pour un effectif total **pair**, on peut choisir comme médiane la demi-somme des deux valeurs « centrales ».

### Définition 7 – quartiles $Q_1$ et $Q_3$



- Le 1<sup>er</sup> **quartile**  $Q_1$  est la plus petite valeur du caractère, pour laquelle au moins 25 % des valeurs sont inférieures à  $Q_1$ .
- Le 3<sup>e</sup> **quartile**  $Q_3$  est la plus petite valeur du caractère, pour laquelle au moins 75 % des valeurs sont inférieures à  $Q_3$ .

Les quartiles sont des indicateurs de dispersion.

**Remarque :**

- Les quartiles  $Q_1$  et  $Q_3$  sont des valeurs du caractère.
- La médiane  $M_e$  pourra *éventuellement* être une valeur du caractère mais ce n'est pas nécessaire.

Pour compléter l'étude d'une série statistique, on observe également souvent deux autres indicateurs de dispersion :

### Définition 8 – étendue



On appelle *étendue* la différence  $x_p - x_1$  (c.-à-d. la différence entre la plus grande valeur et la plus petite valeur du caractère).

### Définition 9 – écart interquartile



On appelle *écart interquartile* la différence  $Q_3 - Q_1$ .





# 5 FONCTIONS AFFINES

## 5.1 Fonction affine. Fonction linéaire

### Définition 1 – fonction affine

$a$  et  $b$  sont deux nombres réels. La fonction  $f$  :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto ax + b \end{aligned}$$

est appelée *fonction affine*.

Dans le cas où  $b = 0$ , on dit que  $f$  est une *fonction linéaire*.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto ax \end{aligned}$$

1. On rappelle que l'expression :

$$f(x) = ax + b$$

doit être comprise comme (on n'écrit pas le signe de multiplication lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté) :

$$f(x) = a \times x + b$$

2. Les fonctions linéaires sont des cas particuliers de fonctions affines (pour  $b = 0$ ). On a donc :

- toutes les fonctions linéaires sont des fonctions affines ;
- il existe des fonctions affines qui ne sont pas linéaires.

## 5.2 Représentation graphique

### Propriété 1

Dans un repère, la fonction affine  $f : x \longmapsto ax + b$  est représentée par une droite sécante avec l'axe des ordonnées.

### Important !

Pour une fonction linéaire ( $b = 0$ ), la représentation graphique de la fonction affine est une droite qui passe par l'origine du repère.

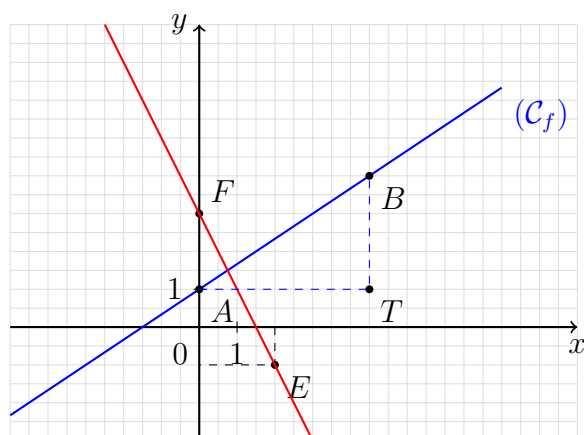
### Propriété 2

Dans un repère, on note  $(d)$  la droite qui représente une fonction affine  $f : x \longmapsto ax + b$ .  
Si  $M(x_M; y_M)$  appartient à  $(d)$ , alors :  $y_M = ax_M + b$ , et seulement dans ce cas.

**Définition 2 – équation de droite**

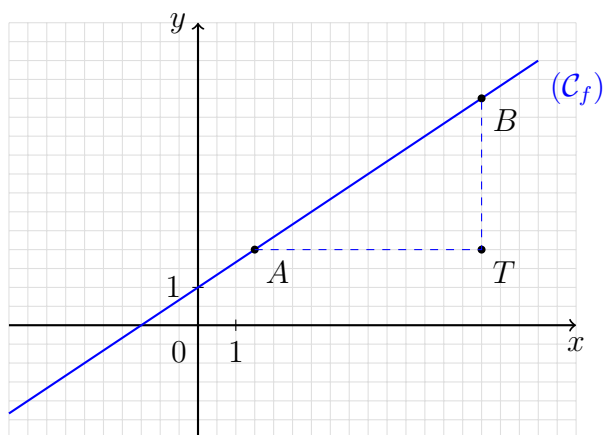
L'équation  $y = ax + b$  est appelée *équation de la droite* ( $d$ ).

- le nombre  $a$  est appelé *coefficient directeur* de ( $d$ );
- le nombre  $b$  est appelé *ordonnée à l'origine* de ( $d$ ).



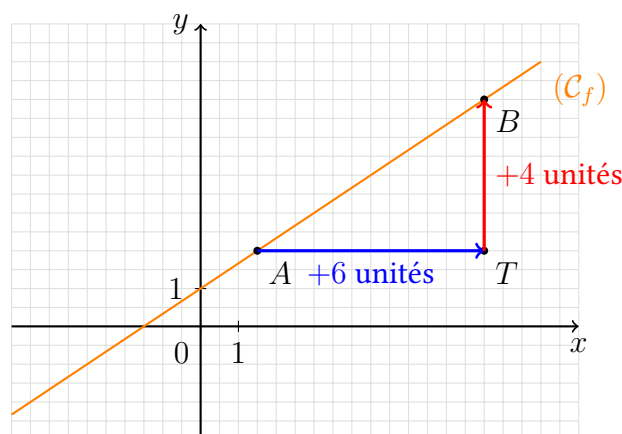
$$f: x \mapsto \frac{2}{3}x + 1$$

$$g: x \mapsto -2x + 3$$

**5.2.1 Interprétation du coefficient directeur et de l'ordonnée à l'origine**

$$f: x \mapsto \frac{2}{3}x + 1$$

### 5.2.2 Détermination graphique du coefficient directeur et de l'ordonnée à l'origine



$$f: x \mapsto \frac{2}{3}x + 1$$

#### Propriété 3

La droite  $(d)$  qui représente la fonction affine  $f: x \mapsto ax + b$  passe par le point de coordonnées  $(0; b)$ .

#### Propriété 4

Si  $A$  et  $B$  sont deux points (distincts) de la droite  $(d)$  qui représente la fonction affine  $f: x \mapsto ax + b$ , alors :

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = a$$

## 5.3 Variations

#### Propriété 5

On considère la fonction affine  $f: x \mapsto ax + b$ , alors :

1. si  $a > 0$ , alors  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ ;
2. si  $a < 0$ , alors  $f$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ ;
3. si  $a = 0$ , alors  $f$  est constante sur  $\mathbb{R}$ .

#### Important !

Dans le cas  $a = 0$ , la représentation graphique de la fonction affine est la droite qui passe par le point  $(0; b)$  et qui est parallèle à l'axe des abscisses.

## 5.4 Signe de $ax + b$

### Propriété 6 - équation $ax + b = 0$



On considère la fonction affine  $f : x \mapsto ax + b$ , avec  $a \neq 0$  :

L'équation  $ax + b = 0$  possède exactement une solution dont la valeur est  $x = \frac{-b}{a}$ .

### Propriété 7 - signe de $ax + b$ , quand $a > 0$



On considère la fonction affine  $f : x \mapsto ax + b$ , avec  $a > 0$  :

|                   |                |                |                |
|-------------------|----------------|----------------|----------------|
| $x$               | $-\infty$      | $\frac{-b}{a}$ | $+\infty$      |
| signe de $ax + b$ | <i>négatif</i> | 0              | <i>positif</i> |

### Propriété 8 - signe de $ax + b$ , quand $a < 0$



On considère la fonction affine  $f : x \mapsto ax + b$ , avec  $a < 0$  :

|                   |                |                |                |
|-------------------|----------------|----------------|----------------|
| $x$               | $-\infty$      | $\frac{-b}{a}$ | $+\infty$      |
| signe de $ax + b$ | <i>positif</i> | 0              | <i>négatif</i> |

# 6 TRANSLATIONS ET VECTEURS

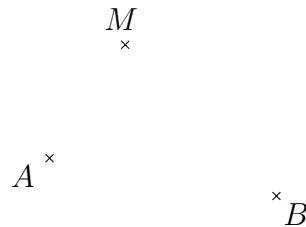
## 6.1 Translation

On rappelle une propriété très utile pour le chapitre :

### Rappel

Un quadrilatère est un parallélogramme si, et seulement si, ses diagonales sont deux segments de même milieu.

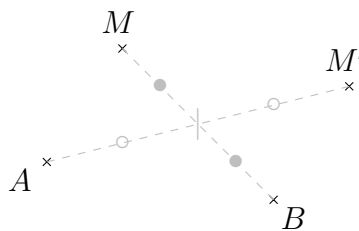
On considère trois points  $A$ ,  $B$  et  $M$  :



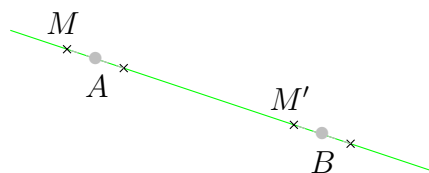
### Définition 1 – translation

$A$  et  $B$  sont deux points.  
On dit que le point  $M'$  est l'image du point  $M$  par la *translation qui envoie  $A$  en  $B$*  lorsque les segments  $[AM']$  et  $[BM]$  ont le même milieu.

On construit le point  $M'$  :



La définition s'applique aussi lorsque les points  $A$ ,  $B$  et  $M$  sont alignés (la figure est plus « difficile » à lire) :



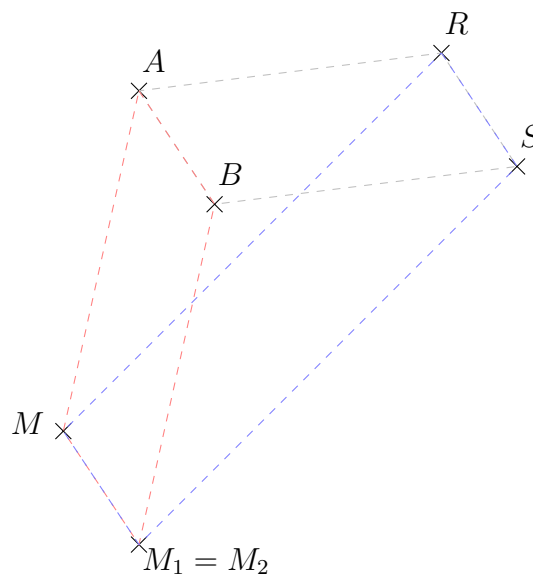
**Propriété 1**

$A$  et  $B$  sont deux points.

Si le point  $M'$  est l'image d'un point  $M$  par la *translation qui envoie  $A$  en  $B$* , alors  $MABM'$  est un parallélogramme, et seulement dans ce cas.

**Translations de même effet**

On note  $M_1$  l'image de  $M$  par la translation qui envoie  $A$  en  $B$  et  $M_2$  l'image de  $M$  par la translation qui envoie  $R$  en  $S$  :



On démontre que :

- si  $ABSR$  est un parallélogramme, alors  $M_1$  et  $M_2$  sont confondus ;
- si  $M_1$  et  $M_2$  sont confondus, alors  $ABSR$  est un parallélogramme.

**Propriété 2 – translations de même effet**

Si  $RABS$  est un parallélogramme, alors la translation qui envoie  $A$  en  $B$  et la translation qui envoie  $R$  en  $S$  « produisent le même effet », et seulement dans ce cas.

**6.2 Vecteur****Définition 2 – vecteur**

$A$  et  $B$  sont deux points.

On appelle translation de *vecteur*  $\overrightarrow{AB}$  la translation qui envoie  $A$  en  $B$ .

Le terme « vecteur » désigne donc trois informations :

- une **direction**<sup>1</sup> :  
 $\rightsquigarrow$  c'est la direction de la droite  $(AB)$ ;
- une **longueur** :  
 $\rightsquigarrow$  la longueur du segment  $[AB]$  (elle est notée  $AB$ );
- un **sens** :  
 $\rightsquigarrow$  sur la droite  $(AB)$ , c'est le sens du point  $A$  vers le point  $B$ .

### Notation



Quand la translation de vecteur  $\overrightarrow{AB}$  et la translation de vecteur  $\overrightarrow{RS}$  ont le même effet, on écrit :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{RS}$$

### Attention!



Le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  et le vecteur  $\overrightarrow{BA}$  :

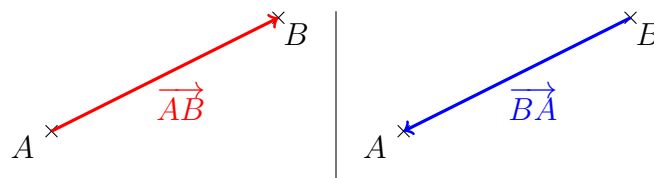
- ont la même direction;
- ont des extrémités qui déterminent des segments de même longueur ( $AB = BA$ );
- *mais ils n'ont pas le même sens!*

$$\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$$

### Définition 3 – vecteurs opposés



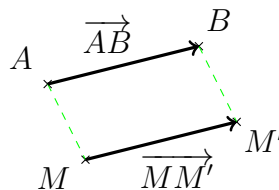
Les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{BA}$  sont appelés **vecteurs opposés**.



### Propriété 3



Si  $M'$  est l'image de  $M$  par la translation de vecteur  $\overrightarrow{AB}$ , alors :  $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$ , et seulement dans ce cas.



## 6.2.1 Vecteurs égaux et milieu d'un segment

1. On dit que des droites parallèles ont la même direction.

**Propriété 4**

Si le point  $I$  est le milieu du segment  $[AB]$ , alors :  $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ .

On peut démontrer que la *propriété réciproque* est vraie :

**Propriété 5 – (réciproque)**

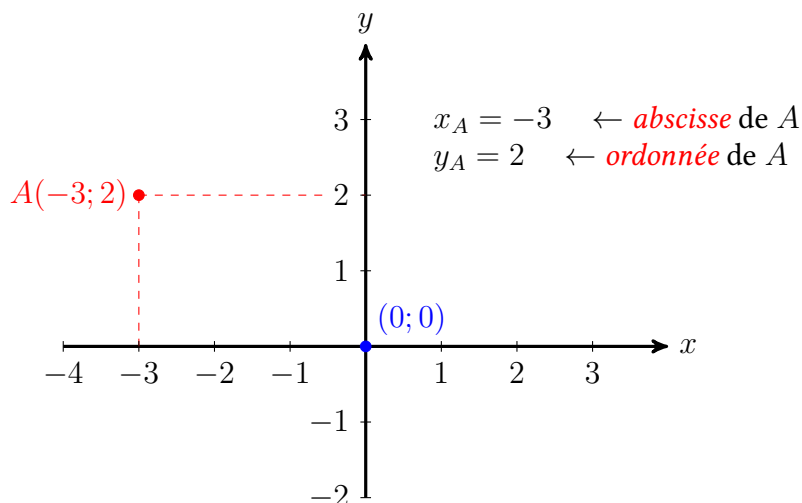
Si, pour trois points  $A$ ,  $B$  et  $M$ , on a :

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB},$$

alors le point  $M$  est le milieu du segment  $[AB]$ .

**6.3 Coordonnées d'un vecteur**

On rappelle la notation des coordonnées d'un point  $A(-3; 2)$  dans un *repère du plan* :

**Définition 4 – coordonnées d'un vecteur**

On appelle *coordonnées* du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  le couple  $(x_B - x_A; y_B - y_A)$ .

On écrit :  $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$

**Attention à l'ordre des nombres dans la formule !**

Par exemple, pour les points  $A(5; 3)$  et  $B(-2; 8)$ , on a :

$$\overrightarrow{AB}(-2 - 5; 8 - 3)$$

c'est-à-dire :

$$\overrightarrow{AB}(-7; 5)$$

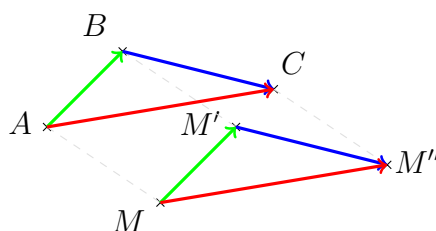


**Propriété 6**

Deux vecteurs sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coordonnées.

**6.4 Somme de deux vecteurs**

On peut démontrer qu'en faisant suivre la translation qui envoie un point  $A$  au point  $B$ , par la translation qui envoie le point  $B$  en un point  $C$ , on obtient une nouvelle translation : c'est la translation qui envoie  $A$  en  $C$ .



Pour les vecteurs, on traduit cette propriété en posant comme définition de la somme de deux vecteurs<sup>2</sup> :

**Définition 5 – somme de deux vecteurs**

$A$ ,  $B$  et  $C$  sont trois points. On appelle *somme des vecteurs*  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{BC}$  le vecteur défini par :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

☞ Cette égalité porte le nom de « *Relation de CHASLES* ».

☞ Dans l'égalité, il faut bien observer que l'extrémité du premier terme (vecteur) est le même point que l'origine du second terme (ici le point  $B$  « entoure » le signe +).

**Définition 6 – règle du parallélogramme**

$A$ ,  $B$  et  $C$  sont trois points :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AT}$$

où le point  $T$  est le quatrième sommet du parallélogramme  $ABTC$ .

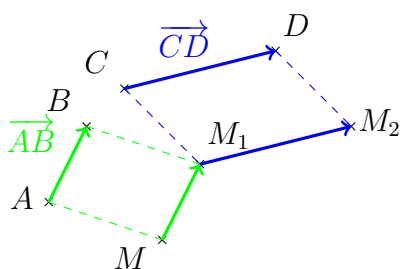
**Une première propriété**

$A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont quatre points.

**1<sup>re</sup> situation**

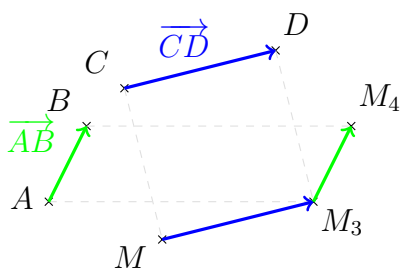
On fait suivre la translation qui envoie le point  $A$  au point  $B$ , par la translation qui envoie le point  $C$  au point  $D$  :

2. Attention ! Dans la définition, l'extrémité du premier vecteur coïncide avec l'origine du second vecteur !



**2<sup>e</sup> situation**

On fait suivre la translation qui envoie le point  $C$  au point  $D$ , par la translation qui envoie le point  $A$  au point  $B$  :



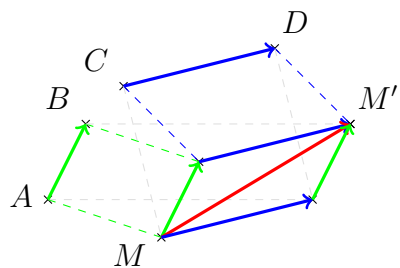
On peut démontrer que les points  $M_2$  et  $M_4$  sont confondus. Cette égalité se traduit par la propriété :

**Propriété 7 - commutativité**



$A, B, C$  et  $D$  sont quatre points quelconques. Alors :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}$$



On peut aussi démontrer l'égalité suivante :

**Propriété 8 - associativité**



$A, B, C, D, E$  et  $F$  sont six points quelconques. Alors :

$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF})$$

On pourra simplifier l'écriture par :

$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF}$$

### Une propriété de la somme

$A$ ,  $B$  et  $C$  sont trois points quelconques. On peut calculer :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CA} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} \\ &= \overrightarrow{AA}\end{aligned}$$

On constate que le point  $A$  est sa propre image par la translation qui envoie  $A$  en  $A$ ... On définit alors le **vecteur nul** :

$$\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \dots = \vec{0}$$

### Définition 7 - vecteur nul



Pour n'importe quel point  $M$  :  $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$

En particulier :

$$\overrightarrow{AB} + \vec{0} = \overrightarrow{AB}$$

### Propriété 9



Le point  $I$  est le milieu du segment  $[AB]$  si, et seulement si :  $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ .

De façon générale, l'addition vectorielle possède les mêmes propriétés que l'addition des nombres.

### Propriété 10



$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont deux vecteurs, de coordonnées :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

Les coordonnées du **vecteur somme**  $\vec{u} + \vec{v}$  sont :

$$\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} a+p \\ b+q \end{pmatrix}$$

### Propriété 11 - coordonnées du vecteur opposé



$\vec{u}$  est un vecteur, de coordonnées  $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ .

Le **vecteur opposé** de  $\vec{u}$  est noté  $-\vec{u}$ .

Les coordonnées du vecteur  $-\vec{u}$  sont :

$$-\vec{u} \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}$$

**Définition 8 - différence**

$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont deux vecteurs.

On définit le vecteur  $\vec{u} - \vec{v}$  par :

$$\begin{aligned}\vec{u} - \vec{v} &= \vec{u} + (\text{vecteur opposé de } \vec{v}) \\ &= \vec{u} + (-\vec{v})\end{aligned}$$

## 6.5 Exercices

### Exercice 1

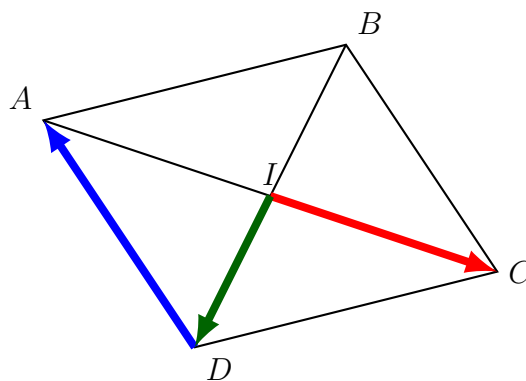
Le quadrilatère  $MNRS$  est un carré; le point  $T$  est le symétrique du point  $R$  par rapport au point  $S$  (la figure est donnée en document annexe).

1. Indiquer les coordonnées de chacun des points  $O$ ,  $I$  et  $J$  dans le repère  $(O, I, J)$ .
2. Relever les coordonnées des points  $M$ ,  $N$ ,  $R$ ,  $S$  et  $T$ .
3. Relever les coordonnées des points  $A$ ,  $E$  et  $K$ .
4.  $M_1N_1R_1T_1$  est l'image de  $MNRT$  par la translation qui envoie  $A$  en  $E$  : placer les points  $M_1$ ,  $N_1$ ,  $R_1$  et  $T_1$  et donner leurs coordonnées.
5. Reprendre la question précédente avec  $M_2N_2R_2T_2$ , image de  $MNRT$  par la translation qui au point  $A$  associe  $K$ .
6. Reprendre la question précédente avec  $M_3N_3R_3T_3$ , image de  $MNRT$  par la translation de vecteur  $\overrightarrow{AK}$ .
7. Reprendre la question précédente avec  $M_4N_4R_4T_4$ , image de  $MNRT$  par la translation de vecteur  $\overrightarrow{KA}$ .
8. Tracer et donner la liste de tous les vecteurs égaux au vecteur  $\overrightarrow{MS}$ .

### Exercice 2

$ABCD$  est un parallélogramme.

Donner une égalité de deux vecteurs pour chacun des vecteurs de couleur bleu, rouge et vert ci-dessous :



### Exercice 3

Dans le repère  $(O, I, J)$ , on considère les points  $E(4; 1,5)$  et  $R(-1; 3)$ .

1. Calculer les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{RE}$ .
2. Construire le point  $S$  tel que  $\overrightarrow{RE} = \overrightarrow{OS}$ .
3. Établir les formules de calcul des coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{OS}$ .
4. Calculer les coordonnées du point  $S$ .

**Exercice 4**

1. Dans un repère  $(O, I, J)$ , placer les points  $A(-2,5; 2,5)$ ,  $B(1; 1)$  et  $C(2; 3,5)$ .
2. Calculer les coordonnées du point  $I$  milieu du segment  $[BC]$ .
3. Calculer les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{AI}$ .
4. En déduire les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{IK}$ .
5. En déduire les coordonnées du point  $K$ .

**Exercice 5**

On travaille dans un repère orthonormé  $(O, I, J)$ .

1. On donne les points  $R(1; 3)$  et  $T(6; -2)$ .
2. Calculer  $OR$ ,  $OT$  et  $RT$ .
3. Démontrer que le triangle  $TOR$  est rectangle, et préciser le sommet de l'angle droit.
4. Le point  $E$  est le milieu du segment  $[RT]$  : calculer  $OE$ .

**Exercice 6**

Dans un repère orthonormé  $(O, I, J)$ , on place les points  $S(-2; 2)$ ,  $T(3; 3)$  et  $W(2; -2)$ .  
Démontrer que le triangle  $SWT$  est isocèle, et préciser en quel sommet.

**Exercice 7**

$A, E, P, R$  sont quatre points.

1. Construire le point  $V$  pour que le quadrilatère  $PRAV$  soit un parallélogramme.
2. Construire le parallélogramme  $PEBV$ .
3. Le point  $I$  est l'intersection des diagonales de  $PRAV$  ; le point  $J$  est l'intersection des diagonales de  $PEBV$ .  
Démontrer que les droites  $(ER)$  et  $(IJ)$  sont parallèles.
4. Déduire des questions précédentes la nature précise du quadrilatère  $ABER$ .

**Exercice 8**

$ABSR$  est un parallélogramme,  $P$  est un point.

1. Construire le point  $K$  image du point  $P$  par la translation qui envoie  $A$  en  $B$  (notée  $t_{A \rightarrow B}$ ).
2. Préciser la nature du quadrilatère  $APKB$ .
3. En considérant la conclusion de l'exercice précédent, en déduire la nature du quadrilatère  $RPKS$ .
4. Quelle est l'image du point  $P$  par la translation  $t_{R \rightarrow S}$  ?

**Exercice 9**

On travaille dans un repère  $(O, I, J)$ .

1. Indiquer les coordonnées de chacun des points  $O, I$  et  $J$ .
2. Les coordonnées du point  $A$  sont  $A(3; -5)$ .  
Indiquer la valeur de l'abscisse de  $A$  et la valeur de  $y_A$ .
3. Les coordonnées du point  $B$  sont  $A(-2; -1,5)$ .  
Calculer les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{AB}$ .
4. On considère le point  $C(-5; -2)$  et le point  $D$  tels que  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ .  
Calculer les coordonnées de  $D$ .
5. On considère le point  $E$  tels que  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EC}$ .  
Calculer les coordonnées de  $E$ .
6. Quelle conjecture peut-on donner pour les points  $C, D$  et  $E$ ?

**Exercice 10**

Le repère  $(O, I, J)$  est orthonormé. On donne :  $A(-1; -5)$  et  $B(3; 2)$ .

1. Construire le point  $H$  intersection des droites  $(d)$  et  $(u)$  :
  - la droite  $(d)$  est parallèle à l'axe des abscisses et passe par  $A$ ;
  - la droite  $(u)$  est parallèle à l'axe des ordonnées et passe par  $B$ .

Indiquer les coordonnées du point  $H$ .

2. Calculer la longueur du segment  $[AH]$ .
3. Déterminer  $BH$ .
4. Calculer la longueur du segment  $[AB]$ .

**Exercice 11**

$A, B$  et  $C$  sont trois points non alignés.

1. Construire le point  $E$  image du point  $C$  par la translation de vecteur  $\overrightarrow{AB}$ .  
Traduire la définition du point  $E$  par une égalité de vecteurs.
2. Construire le point  $F$  tel que  $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AC}$ .
3. Construire le point  $G$  tel que  $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{CE}$ .
4. Quelle est la nature du quadrilatère  $CBGF$ ? Justifier.





## 7.1 Expérience aléatoire

- On parle d'*expérience aléatoire* pour désigner une expérience dont on connaît tous les résultats *possibles* mais dont on ne connaît pas le résultat avant de l'avoir effectuée.
- Afin d'être étudiée, une expérience aléatoire est conduite avec un *protocole* : elle doit pouvoir être répétée dans les mêmes conditions.
- On étudie la « chance » de réalisation d'un fait (on dit un *événement*), c'est-à-dire la probabilité de constater ce fait.
- Pour décrire une expérience aléatoire, on emploie le vocabulaire et les notations des *ensembles*.

## 7.2 Issues et univers d'une expérience aléatoire

### Définition 1 – issues



Les résultats possibles d'une expérience aléatoire sont appelés *issues*.

### Définition 2 – univers



L'ensemble de toutes les issues est appelé *univers* d'une expérience aléatoire.

L'univers est noté «  $\Omega$  » (on dit « omega », c'est la vingt-quatrième lettre majuscule de l'alphabet grec).

Chaque issue d'une expérience aléatoire possède une *probabilité* : c'est un nombre compris entre 0 et 1, qui exprime ses chances de réalisation.

Définir un *modèle de probabilité* pour une expérience aléatoire consiste à fixer, pour chaque issue de l'univers, un nombre compris entre 0 et 1, appelé *probabilité de l'issue*, de façon que la somme des probabilités de toutes les issues soit égale à 1.

### 7.2.1 Définir un modèle par l'observation de la fréquence

On procède par exemple ainsi quand on ne peut pas faire autrement :

On répète de nombreuses fois l'expérience aléatoire ; la fréquence d'apparition d'une issue (pour chaque issue) évolue vers une valeur stable (comprise entre 0 et 1) : c'est cette valeur que l'on prend comme probabilité de l'issue.

### 7.2.2 Définir un modèle par une détermination théorique

On peut parfois donner un modèle théorique, en particulier lorsque *toutes les issues ont les mêmes chances de réalisation*; on parle d'*équiprobabilité*.

#### Propriété 1



Dans le modèle d'équiprobabilité, si l'univers  $\Omega$  possède  $n$  issues, alors la probabilité de chaque issue est égale à  $\frac{1}{n}$ .

#### Propriété 2 – probabilité



La probabilité d'une issue (ou d'un événement) vérifie deux propriétés :

- une probabilité est un nombre compris entre 0 et 1 ;
- la somme des probabilités de toutes les issues d'un univers est toujours égale à 1.

## 7.3 Événements

#### Définition 3 – événement



Un *événement* est composé d'une ou plusieurs (éventuellement aucune) issues de l'univers.

#### Propriété 3 – probabilité d'un événement



La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités des issues qui le composent.

La probabilité d'un événement  $A$  est souvent notée  $P(A)$ .

#### Définition 4 – événement certain



Un *événement certain* est un événement toujours réalisé.

La probabilité d'un événement certain est 1.

#### Définition 5 – événement contraire



L'*événement contraire* d'un événement  $A$  est l'événement réalisé lorsque  $A$  n'est pas réalisé. On le note  $\bar{A}$  (lu « A barre »).

#### Définition 6 – événements incompatibles



On dit que deux événements sont *incompatibles* lorsqu'ils ne peuvent être réalisés simultanément.



Deux événements contraires sont incompatibles.

**Propriété 4**

On considère  $A$  et  $B$  deux événements de l'univers  $\Omega$  d'une expérience aléatoire.

Alors :

$$P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$$

On en déduit deux égalités :

- la probabilité de l'événement «  $A$  ou  $B$  » :
- la probabilité de l'événement «  $A$  et  $B$  » :

**Propriété 5**

Soit  $A$  un événement de l'univers  $\Omega$  d'une expérience aléatoire.

Alors :

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

## 8.1 Produit d'un vecteur par un réel

**Définition 1 – produit d'un vecteur par un réel**

$\vec{u}$  est un vecteur et  $\lambda$  est un nombre réel.

Le vecteur noté  $\lambda \vec{u}$  est appelé *produit du vecteur  $\vec{u}$  par le nombre  $\lambda$* ; le vecteur  $\lambda \vec{u}$  est défini par :

$$\lambda \vec{u} \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{pmatrix}$$

où  $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  désigne les coordonnées du vecteur  $\vec{u}$  dans un repère du plan.

On démontre que les coordonnées du vecteur  $\lambda \vec{u}$  ne dépendent pas du repère choisi, mais elles dépendent uniquement des coordonnées du vecteur  $\vec{u}$  et de la valeur de  $\lambda$ .

**Propriété 1**

$\vec{u}$  est un vecteur non nul ( $\vec{u} \neq \vec{0}$ ).

1.  $\vec{u}$  et  $\lambda \vec{u}$  ont le même sens si, et seulement si,  $\lambda > 0$ ;
2.  $\vec{u}$  et  $\lambda \vec{u}$  sont de sens opposés si, et seulement si,  $\lambda < 0$ .

Le produit d'un vecteur par un nombre possède diverses propriétés :

**Propriété 2**

$\alpha$  et  $\beta$  sont deux réels,  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont deux vecteurs.

1.  $(\alpha + \beta) \vec{u} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{u}$ ;
2.  $\alpha (\beta \vec{u}) = (\alpha\beta) \vec{u}$ ;
3.  $\alpha (\vec{u} + \vec{v}) = \alpha \vec{u} + \alpha \vec{v}$ .

## 8.2 Vecteurs colinéaires

### Définition 2 – vecteurs colinéaires

On dit que deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont *colinéaires* lorsqu'il existe un nombre réel  $\lambda$  tel que :  
 $\vec{u} = \lambda \vec{v}$ .

En particulier, le vecteur nul est colinéaire à n'importe quel autre vecteur.

### Propriété 3

Dans un repère, deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles.

Autrement dit :

$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  sont colinéaires si et seulement si :

$$x \times b = y \times a$$

### Propriété 4 – colinéarité et parallélisme

Deux droites  $(AB)$  et  $(CD)$  sont parallèles si et seulement si  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  sont colinéaires.

### Propriété 5 – colinéarité et alignement

Trois points  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont alignés si, et seulement si, les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont colinéaires.

### Propriété 6 – appartenance d'un point à une droite

Un point  $M$  appartient à une droite  $(AB)$  si et seulement si les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AM}$  sont colinéaires.

### Définition 3 – vecteur directeur

On dit que le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  est un *vecteur directeur* de la droite  $(AB)$ .

N'importe quel vecteur non nul et colinéaire au vecteur  $\overrightarrow{AB}$  est aussi un vecteur directeur de la droite  $(AB)$ .

## 9.1 Fonctions du second degré

### Définition 1 – fonction polynôme du second degré

$a, b$  et  $c$  sont trois nombres réels ;  $a$  est non nul.

La fonction  $f$  définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

est appelée *fonction polynôme du second degré*.

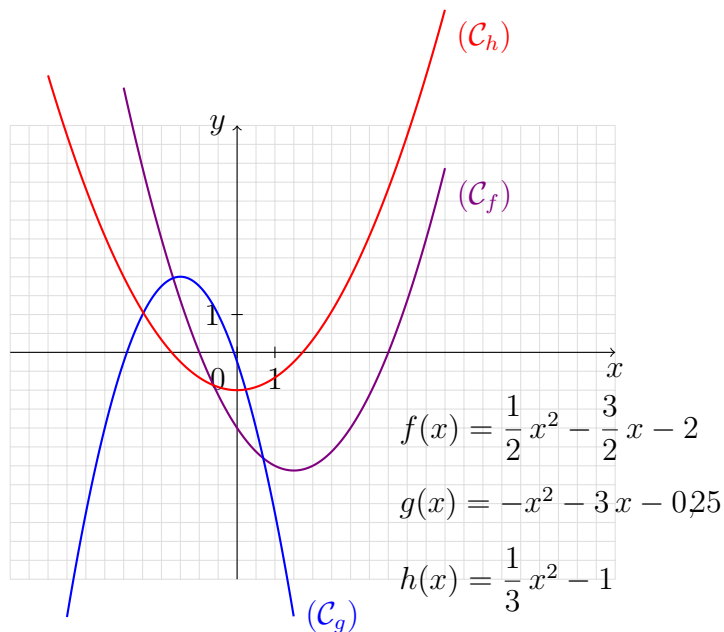
#### EXEMPLE :

Une fonction dont l'expression est  $f(x) = -3(x - 7)^2 + 5$  est une fonction polynôme du second degré.

### Propriété 1 – représentation graphique

La représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré est une *parabole* :

- pour  $a > 0$ , la parabole « pointe vers le haut » (courbe en «  $\cup$  ») ;
- pour  $a < 0$ , la parabole « pointe vers le bas » (courbe en «  $\cap$  »).



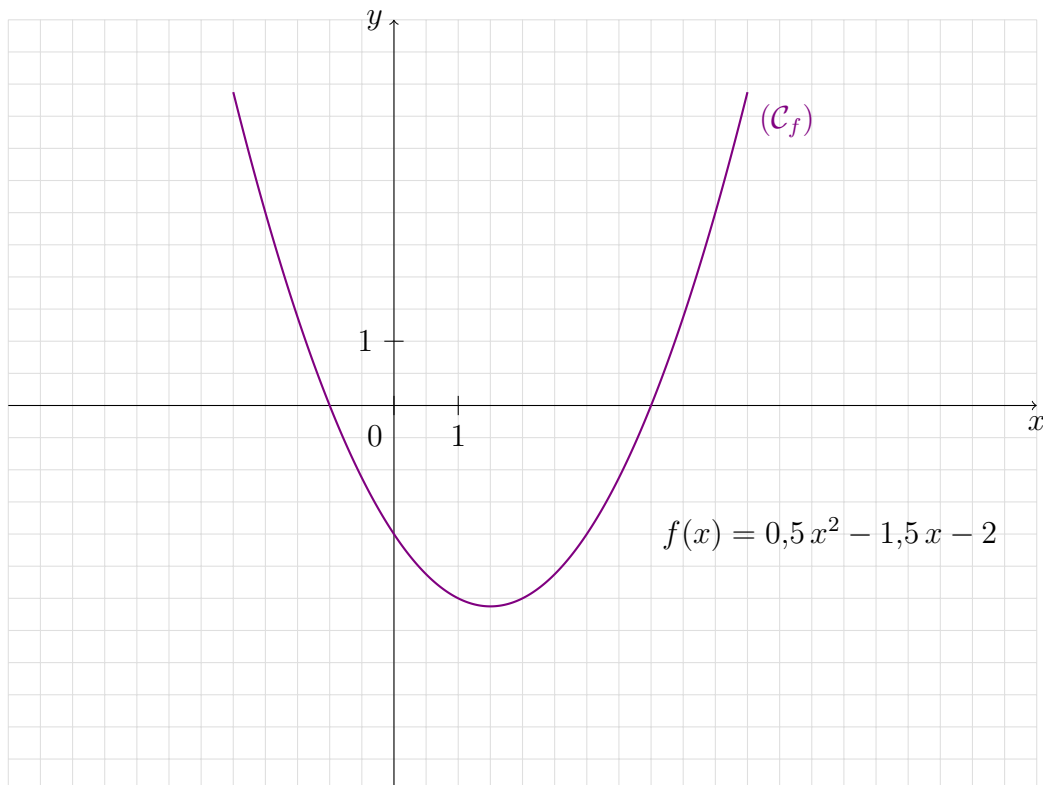
### Propriété 2 – « sommet » d'une parabole



La parabole représentant une fonction  $f$  polynôme du second degré possède un « sommet », dont l'abscisse est le nombre  $\frac{-b}{2a}$  :

- pour  $a > 0$ , le sommet est le point de la parabole *d'ordonnée minimale*;
- pour  $a < 0$ , le sommet est le point de la parabole *d'ordonnée maximale*.

L'ordonnée du sommet est égale à  $f\left(\frac{-b}{2a}\right)$ .



### Propriété 3 – axe de symétrie



La parabole qui représente une fonction polynôme du second degré possède un axe de symétrie, parallèle à l'axe des ordonnées, et qui passe par le sommet de la parabole.

### Propriété 4 – variations d'une fonction du second degré



$f$  est une fonction polynôme du second degré ayant pour sommet un point *d'abscisse  $\alpha$*  :

- pour  $a > 0$ , la fonction est décroissante sur  $]-\infty ; \alpha[$  et croissante sur  $[\alpha ; +\infty[$ ;
- pour  $a < 0$ , la fonction est croissante sur  $]-\infty ; \alpha[$  et décroissante sur  $[\alpha ; +\infty[$ .



## 9.2 La fonction « inverse »

### Définition 2 – fonction inverse

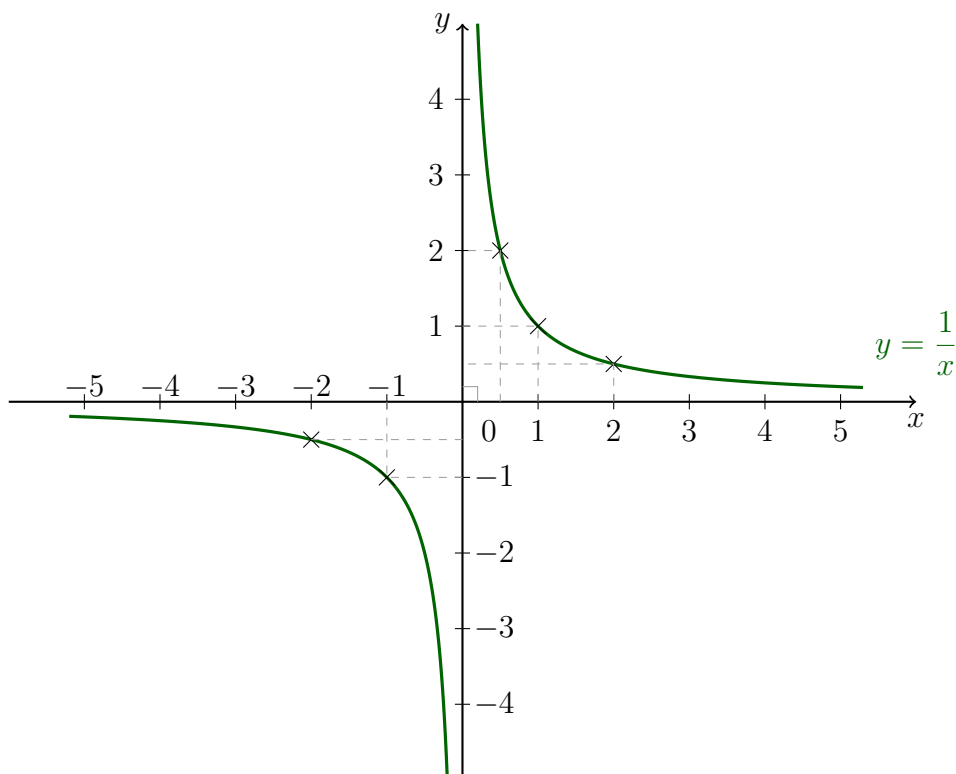
La fonction « inverse » est définie par :

$$\begin{aligned} ]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

La fonction inverse est représentée par une courbe appelée « *hyperbole* ».

### Propriété 5 – variations

1. La fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est strictement décroissante sur  $] -\infty; 0[$ .
2. La fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est strictement décroissante sur  $] 0; +\infty[$ .





## 10 DROITES ET SYSTÈMES



## A.1 Quelques programmes

On propose ici quelques programmes avec deux objectifs :

- pour chacune des familles de calculatrices *CASIO* et *Texas-Instruments*, montrer quelques exemples de programmes : ils pourront servir pour retrouver la syntaxe de quelques instructions de chaque langage ;
- les programmes présentés ont tous un intérêt mathématique dans le cadre des programmes du lycée. Ils pourront donc être utiles selon les chapitres abordés en classe.

### A.1.1 Simulation

On présente ci-dessous une simulation à la calculatrice de l'expérience aléatoire suivante :

« Une urne contient un certain nombre de billes, toutes bleues ou rouges et indiscernables. On tire une bille, on note sa couleur, puis on la remet dans l'urne. On recommence plusieurs fois l'expérience. Le jeu consiste à deviner le nombre de billes de chaque couleur dans l'urne. »

| Programme CASIO           | Programme TI                      |
|---------------------------|-----------------------------------|
| "BILLES "? → N ↵          | : Input "BILLES? ", N             |
| RanInt#(1, n) → B ↵       | : nbrAléaEnt(1, n) → B            |
| N - B → R ↵               | : N - B → R                       |
| "TIRAGES "? → T ↵         | : Input "TIRAGES? ", T            |
| 0 → U ↵                   | : 0 → U                           |
| 0 → V ↵                   | : 0 → V                           |
| 0 → I ↵                   | : 0 → I                           |
| While I < T ↵             | : While I < T                     |
| RanInt#(1, n) → A ↵       | : nbrAléaEnt(1, n) → A            |
| If A ≤ B ↵                | : If A ≤ B                        |
| Then ↵                    | : Then                            |
| U + 1 → U ↵               | : U + 1 → U                       |
| Else ↵                    | : Else                            |
| V + 1 → V ↵               | : V + 1 → V                       |
| IfEnd ↵                   | : End                             |
| I + 1 → I ↵               | : I + 1 → I                       |
| WhileEnd ↵                | : End                             |
| "BLEUES TIREES : " ↵      | : Disp "BLEUES TIREES :", U       |
| U ▲                       | : Disp "ROUGES TIREES :", V       |
| "ROUGES TIREES : " ↵      | : Input "DEVINEZ PUIS VALIDEZ", Z |
| V ▲                       | : Disp "BLEUES DANS L'URNE :", B  |
| "DEVINEZ PUIS VALIDEZ" ↵  | : Disp "ROUGES DANS L'URNE :", R  |
| "BLEUES DANS L'URNE : " ↵ |                                   |
| B ▲                       |                                   |
| "ROUGES DANS L'URNE : " ↵ |                                   |
| R ▲                       |                                   |

### A.1.2 Division euclidienne

$A$  et  $B$  sont deux nombres entiers naturels,  $B$  est non nul.

Le programme suivant calcule le *reste*  $R$  dans la *division euclidienne* (division entière), selon l'égalité :

$$A = B \times Q + R$$


où  $Q$  et  $R$  sont des entiers, avec :  $0 \leq R < B$ .

| Programme CASIO | Programme TI    |
|-----------------|-----------------|
| "A="? → A ↵     | : Input "A=", A |
| "B="? → B ↵     | : Input "B=", B |
| While A ≥ B ↵   | : While A ≥ B   |
| ( A - B ) → A ↵ | : ( A - B ) → A |
| WhileEnd ↵      | : End           |
| "RESTE" ↵       | : Disp "RESTE"  |
| R               | : Disp R        |

Le programme suivant calcule le *quotient (entier)*  $Q$  dans la division euclidienne du nombre entier naturel  $A$  par le nombre entier naturel non nul  $B$  :

| Programme CASIO | Programme TI      |
|-----------------|-------------------|
| "A=" ? → A ↵    | : Input "A=", A   |
| "B=" ? → B ↵    | : Input "B=", B   |
| 0 → Q ↵         | : 0 → Q           |
| While A ≥ B ↵   | : While A ≥ B     |
| (A - B) → A ↵   | : (A - B) → A     |
| Q + 1 → Q ↵     | : Q + 1 → Q       |
| WhileEnd ↵      | : End             |
| "QUOTIENT" ↵    | : Disp "QUOTIENT" |
| Q               | : Disp Q          |

### Remarque :

 Le programme calculant le quotient s'obtient à partir du programme qui calcule le reste, en ajoutant 1 au quotient à chaque soustraction du dividende par le diviseur (en dehors des instructions d'affichage).



### A.1.3 PGCD : Plus Grand Commun Diviseur

$A$  et  $B$  sont deux nombres entiers naturels.

Le programme principal *PGCD* appelle le sous-programme *RESTE2* pour calculer le reste dans la division euclidienne de  $A$  par  $B$ , en partageant les informations dans les variables  $C$  et  $D$ .

Les deux programmes suivants concernent les calculatrices **CASIO**.

#### ☞ Le sous-programme RESTE2

| Programme CASIO         |
|-------------------------|
| While $C \geq D$ ↵      |
| $C - D \rightarrow C$ ↵ |
| WhileEnd ↵              |
| Return ↵                |

#### ☞ Le programme PGCD

| Programme CASIO     |
|---------------------|
| "A=" ? → A ↵        |
| "B=" ? → B ↵        |
| While $B > 0$ ↵     |
| $A \rightarrow C$ ↵ |
| $B \rightarrow D$ ↵ |
| Prog "RESTE2" ↵     |
| $B \rightarrow A$ ↵ |
| $C \rightarrow B$ ↵ |
| WhileEnd ↵          |
| "PGCD" ↵            |
| A                   |

Les deux programmes suivants concernent les calculatrices **Texas-Instruments**.

☞ **Le sous-programme RESTE2**

| Programme TI            |
|-------------------------|
| : While $C \geq D$      |
| : $C - D \rightarrow D$ |
| : End                   |

☞ **Le programme PGCD**

| Programme TI        |
|---------------------|
| : Input "A=", A     |
| : Input "B=", B     |
| : While $B > 0$     |
| : $A \rightarrow C$ |
| : $B \rightarrow D$ |
| : prgmRESTE2        |
| : $B \rightarrow A$ |
| : $C \rightarrow B$ |
| : End               |
| : Disp "PGCD"       |
| : Disp A            |

### A.1.4 Partie entière

On considère un nombre flottant noté  $X$  (c'est-à-dire, pour les nombres d'une calculatrice ou d'un ordinateur, un nombre qui peut *ne pas* être entier).

Le programme suivant calcule la partie entière de  $X$  :

| Programme CASIO   | Programme TI      |
|-------------------|-------------------|
| "X=" ? → X ↵      | : Input "X=", X   |
| 0 → N ↵           | : 0 → N           |
| If X ≥ 0 ↵        | : If X ≥ 0        |
| While N + 1 ≤ X ↵ | : Then            |
| N + 1 → N ↵       | : While N + 1 ≤ X |
| WhileEnd ↵        | : N + 1 → N       |
| N ↵               | : End             |
| Else ↵            | : Disp N          |
| While N > X ↵     | : Else            |
| N - 1 → N ↵       | : While N > X     |
| WhileEnd ↵        | : N - 1 → N       |
| N ↵               | : End             |
| IfEnd ↵           | : Disp N          |
|                   | : End             |

#### Remarque importante

Il faut savoir que les constructeurs de calculatrices appellent « partie entière » les fonctions `Int` (pour les calculatrices CASIO) et `ent` (calculatrices Texas-Instruments), mais celles-ci ne sont pas exactement la partie entière en Mathématiques.

En effet, les concepteurs de calculatrices appellent « partie entière » la *troncature à l'unité*; pour les nombres positifs, on obtient dans les deux cas la même valeur, mais pour les nombres négatifs, on obtient deux valeurs distinctes pour les nombres non entiers négatifs!!!

On peut le constater sur quelques exemples :

| nombre | partie entière mathématique | troncature à l'unité |
|--------|-----------------------------|----------------------|
| 1,414  | 1                           | 1                    |
| -6     | -6                          | -6                   |
| -3,14  | -4                          | -3                   |

La définition mathématique de la partie entière vérifie la propriété :

$$\forall x \in \mathbb{R}, [x] \leq x < [x] + 1$$

où la notation  $[x]$  désigne la partie entière du nombre réel  $x$ .

L'algorithme à l'origine du programme précédent est :

**Données :**

$X$  un nombre réel

**Résultat :**

$N$  un nombre entier relatif (égal à la partie entière de  $X$ )

**Traitement**

choisir la valeur de  $X$

fixer la valeur de  $N$  à 0

**si**  $X \geq 0$  **alors**

**tant que**  $N + 1 \leq X$  **faire**

        | fixer la valeur de  $N$  à  $(N + 1)$

**fin tq**

**sinon**

**tant que**  $N > X$  **faire**

        | fixer la valeur de  $N$  à  $(N - 1)$

**fin tq**

**fin si**

retourner  $N$

**Fin du traitement**