Mathématiques

Pascal CHAUVIN

T$^{\text{le}}$ ES

2 avril 2018

Table des matières

1 Suites

1.1 Suites géométriques

Définition 1 – *suite géométrique*

k et q sont deux nombres réels.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = k \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = q \times u_n \end{cases}$$

est appelée *suite géométrique* de *premier terme* k et de *raison* q.

☞ La définition permet de calculer n'importe quel terme de la suite à l'aide du terme précédent, par exemple le calcul de u_{2017} à partir de la valeur de u_{2016} :

$$u_{2017} = q \times u_{2016}$$

Exemple ▷ Calculer u_1, u_2, u_3 et u_5 pour la suite géométrique de premier terme 150 et raison 3.

Propriété 1

Pour toute suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison q, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 \times q^n$$

☞ Cette propriété permet de calculer n'importe quel terme de u, quel que soit son rang n (*c.-à-d.* sans connaître le terme précédent).

Exemple 1 ▷ Calculer u_{30} pour la suite géométrique de premier terme $-1{,}6$ et de raison 3.

Exemple 2 ▷ Calculer le huitième terme de la suite géométrique de premier terme 3 et de raison $\frac{1}{4}$.

☞ Pour une suite géométrique dont le premier terme a pour rang 1, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = u_1 \times q^{n-1}$$

1.1.1 Somme de termes d'une suite géométrique

Propriété 2

Pour n'importe quel entier naturel n et n'importe quel réel q, avec $q \neq 1$:

$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

☞ Cette formule donne la somme des $n+1$ premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison q (lorsque $q \neq 1$).

Exemple ▷ Calculer $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{20}$ pour la suite géométrique u de premier terme $2{,}1$ et de raison $0{,}3$.

1.1.2 Variations

Propriété 3

On considère la suite géométrique (u_n) de premier terme u_0 et de raison q :

$u_0 > 0$	$u_0 < 0$
— si $q > 1$: (u_n) est croissante ; — si $0 < q < 1$: (u_n) est décroissante.	— si $q > 1$: (u_n) est décroissante ; — si $0 < q < 1$: (u_n) est croissante.

☞ Lorsque $q < 0$, la suite (u_n) n'est ni croissante ni décroissante.

1.1.3 Limite d'une suite géométrique

Propriété 4

Une suite géométrique de terme général q^n possède comme limite :

$0 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} 1^n = 1$	$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$

Ce cas particulier simple permet de déduire la propriété plus générale :

Propriété 5

Une suite géométrique *positive* (u_n) de premier terme u_0 (avec $u_0 \neq 0$) et de raison q possède comme limite :

$0 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

1.2 Suites arithmético-géométriques

Définition 2 – *suite arithmético-arithmétique*

a, b et k sont trois nombres réels.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = k \\ \forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = a \times u_n + b \end{cases}$$

est appelée *suite arithmético-géométrique*.

1.3 Exercices

Exercice 1

1. On considère la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{4-n}{n+3}$.
   Calculer u_0, u_1, u_2 et u_{100}.
2. On considère la suite (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = n + (-1)^n$.
   Calculer v_0, v_1, v_2 et v_{100}.
3. On considère la suite (w_n) définie par : $\begin{cases} w_0 = -4 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = 2w_n + 1 \end{cases}$
   Calculer w_1, w_2 et w_3.
4. On considère la suite (t_n) définie par : $\begin{cases} t_1 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geqslant 1,\ t_{n+1} = t_n + \dfrac{1}{n} \end{cases}$
   Calculer t_2, t_3 et t_4.

Exercice 2

Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = -15$ et raison $r = 3$.

1. Calculer u_1 puis u_2.
2. Donner l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n.
3. Donner l'expression de u_n en fonction de n.
4. Calculer u_{2016}.

Exercice 3

Pour la création d'une affaire, un entrepreneur investit un capital de $20\,000$ €. Il complète cette valeur initiale tous les mois, par un apport calculé à partir du premier capital, qui diminue chaque mois de 30 %.

Calculer le capital total obtenu en fin de première année.

Exercice 4

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 20 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3} \end{cases}$

1. Prouver que (u) est une suite géométrique et donner sa raison.
2. Calculer les termes u_1, u_2, u_3 et u_{100}.
3. Calculer la somme $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{100}$.

Exercice 5

Calculer la somme des 50 premiers termes de la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $0{,}6$.

Exercice 6

Soit (v_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 3 + 0{,}4^n$.

1. Prouver l'égalité :
$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = A \times 0{,}4^n$$
dans laquelle A est un nombre dont on donnera la valeur.
2. La suite (v_n) est-elle croissante ? Justifier.

Exercice 7

Dans cet exercice, toutes les suites sont géométriques.

1. Le premier terme est 16 et la raison est $\dfrac{1}{2}$: calculer le 4^{e} terme et le 34^{e} terme.
2. Le 1^{er} terme est 1000 ; le 3^{e} terme est 1200 : calculer la raison et le 2^{e} terme.
3. Le 5^{e} terme est 36 ; le 9^{e} terme est $2{,}25$: calculer le 1^{er} terme et la raison.

Exercice 8

Au cours d'une bourse aux livres, un manuel scolaire perd chaque année $12\ \%$ de sa valeur. Un livre acheté neuf en $1\,985$ coûtait alors 150 francs.

Quel est son prix à la bourse aux livres de $1\,990$? de $1\,995$?

Exercice 9

« Un voyageur parcourt 100 lieues en 8 jours et il a fait chaque jour 3 lieues de plus que le jour précédent ; on demande combien de lieues il a fait chaque jour. »

J. OZANAM (1 725)

2 Continuité

2.1 Fonction continue sur un intervalle

2.1.1 Fonction dérivable en un point

Définition 1 – *fonction dérivable en un point*

f est une fonction définie sur un intervalle I.

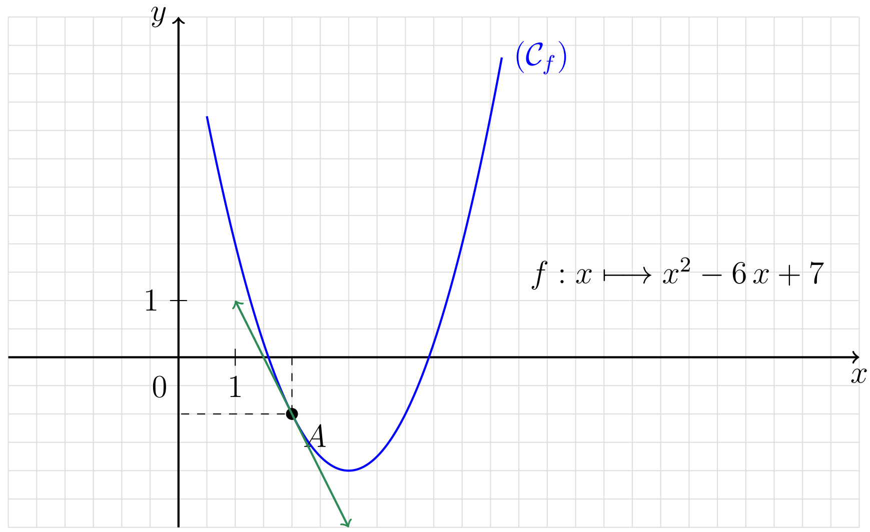
$a \in I$; h est un réel vérifiant $h \neq 0$ et $a + h \in I$.

Lorsque le nombre $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ tend vers un nombre L quand h tend vers 0, on dit que la fonction f est *dérivable en a*.

Le nombre L est appelé *nombre dérivé* de la fonction f en a ; on note $L = f'(a)$.

La *tangente* à la courbe qui représente f en son point $A(a; f(a))$ est la droite :

- de coefficient directeur $f'(a)$;
- d'équation $y = f'(a)\,(x - a) + f(a)$.



La fonction $a \longmapsto f'(a)$ est appelée *fonction dérivée* de f ; elle est notée f'.

2.2 Fonctions continues

On dira qu'une fonction est *continue* lorsqu'on peut tracer sa courbe représentative « sans lever le crayon de la feuille », c'est-à-dire que la courbe représentative ne présente pas de rupture.

Propriété 1

1. Les *fonctions affines* $x \longmapsto a\,x + b$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction *carré* $x \longmapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$.
3. La fonction *racine carrée* $x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
4. La fonction *inverse* $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.
5. Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.

Propriété 2

f est une fonction définie sur un intervalle I.

Si f est dérivable sur I, alors f est continue sur I.

☞ *La réciproque est fausse !*

2.2.1 Théorème des valeurs intermédiaires

Propriété 3

Si une fonction f est continue sur un intervalle $[a; b]$, alors, pour n'importe quel réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, *il existe au moins* un réel $x_0 \in [a; b]$ tel que $f(x_0) = \lambda$.

Propriété 4

Si une fonction f est continue et strictement monotone sur un intervalle $[a; b]$, alors, pour n'importe quel réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, *il existe un réel unique* $x_0 \in [a; b]$ tel que $f(x_0) = \lambda$.

Convention

Dans un tableau de variations, une flèche indique la continuité (et la stricte monotonie) de la fonction sur l'intervalle correspondant à cette flèche.

2.2.2 Signe de la dérivée : variations et extrema

Propriété 5

f est une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si $f' \geqslant 0$ sur I, alors f est croissante sur I.
- Si $f' > 0$ sur I, alors f est strictement croissante sur I.
- Si $f' \leqslant 0$ sur I, alors f est décroissante sur I.
- Si $f' < 0$ sur I, alors f est strictement décroissante sur I.

Propriété 6

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

La fonction f admet un *extremum local* en $x_0 \in I$ si, et seulement si, f' s'annule en x_0 « en changeant de signe ».

2.3 Rappels : formulaires de dérivation

Propriété 7 – *fonctions dérivées usuelles*

On rappelle ci-dessous les fonctions dérivées des fonctions usuelles :

fonction	définie sur	dérivable sur	fonction dérivée
$f(x) = a\,x + b$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = n\,x^{n-1}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n} \quad (n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = \dfrac{-n}{x^{n+1}}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0; +\infty[$	$]0; +\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Propriété 8 – *fonctions dérivées et opérations*

u et v désignent deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I ; λ est un réel.

1. La fonction $u + v$ est dérivable sur I, avec : $(u+v)' = u' + v'$;
2. La fonction λu est dérivable sur I, avec : $(\lambda\,u)' = \lambda\,u'$;
3. La fonction uv est dérivable sur I, avec : $(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$;
4. *Si la fonction v ne s'annule pas sur I*, alors la fonction $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I, avec :
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}.$$

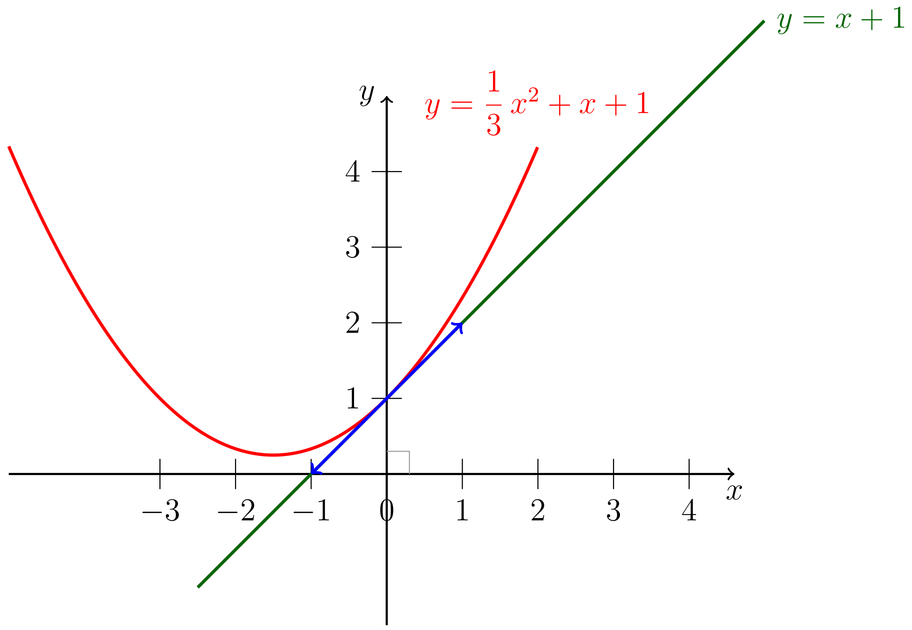
2.4 Convexité

2.4.1 Fonction convexe

Définition 2 – ***fonction convexe sur un intervalle***

f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. On note $(\mathcal{C}_f)$ la courbe qui représente f.

On dit que f est *convexe* sur I lorsque la courbe $(\mathcal{C}_f)$ est située *au-dessus* de sa tangente, et cela pour n'importe quel point de $(\mathcal{C}_f)$ d'abscisse $a \in I$.



Définition 3 – ***fonction concave sur un intervalle***

f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

On dit que f est *concave* sur I lorsque la courbe $(\mathcal{C}_f)$ est située *au-dessous* de sa tangente, pour n'importe quel point de $(\mathcal{C}_f)$ d'abscisse $a \in I$.

Exemples

- La fonction « carré » $x \longmapsto x^2$ est ...
- La fonction « racine carrée » $x \longmapsto \sqrt{x}$ est ...
- La fonction « inverse » $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est ...

Propriété 9

Soit f une fonction définie et dérivable sur I.

- f est convexe sur I si, et seulement si, f' est croissante sur I.
- f est concave sur I si, et seulement si, f' est décroissante sur I.

2.4.2 Fonction « dérivée seconde »

Définition 4 – *fonction dérivée seconde*

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

Lorsque la fonction f' est elle-même définie et dérivable sur I, alors la fonction dérivée de f' est appelée *fonction dérivée seconde* de f, et elle est notée f''.

On dit dans ce cas que f est deux fois dérivable sur I.

Propriété 10

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur I.

— Si, pour n'importe quel $x \in I$, $f''(x) \geqslant 0$ alors f est convexe sur I.

— Si, pour n'importe quel $x \in I$, $f''(x) \leqslant 0$ alors f est concave sur I.

2.4.3 Point d'inflexion

Définition 5 – *point d'inflexion*

On dit qu'un point de la courbe représentant une fonction est un *point d'inflexion* lorsque la tangente à la courbe en ce point « traverse » la courbe en ce point.

Propriété 11

f est une fonction définie sur un intervalle I, et deux fois dérivable sur I ; a est un réel de I.

Si f'' s'annule en a en changeant de signe, alors le point $\big(a\,;f(a)\big)$ est un point d'inflexion de la représentation graphique de f.

3 Probabilités conditionnelles

3.1 Rappels

Définition 1 – *événements incompatibles*

On dit que deux événements qui ne peuvent pas se produire simultanément sont *incompatibles*.

Propriété 1

Si A et B sont deux événements incompatibles, alors :

$$p(A \cap B) = 0 \quad \text{et} \quad p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

En particulier, un événement et son événement contraire sont incompatibles.

3.2 Probabilités conditionnelles

Définition 2 – *probabilité conditionnelle de B sachant A*

Soient A et B deux événements d'un univers Ω, la probabilité de l'événement A étant non nulle.

On appelle *probabilité de B sachant A* le nombre noté $p_A(B)$ défini par :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

☞ ***Attention !***

Les notations p et p_A désignent deux probabilités distinctes !

Propriété 2

Soient A et B deux événements d'un univers Ω, avec $p(A) \neq 0$.

1. La probabilité d'un événement est un nombre compris entre 0 et 1 (inclus) :

$$0 \leqslant p_A(B) \leqslant 1$$

2. La somme des probabilités d'un événement et de son événement contraire est 1 :

$$p_A(B) + p_A\left(\overline{B}\right) = 1$$

Propriété 3

Soient A et B deux événements d'un univers Ω, avec $p(A) \neq 0$.

$$p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$$

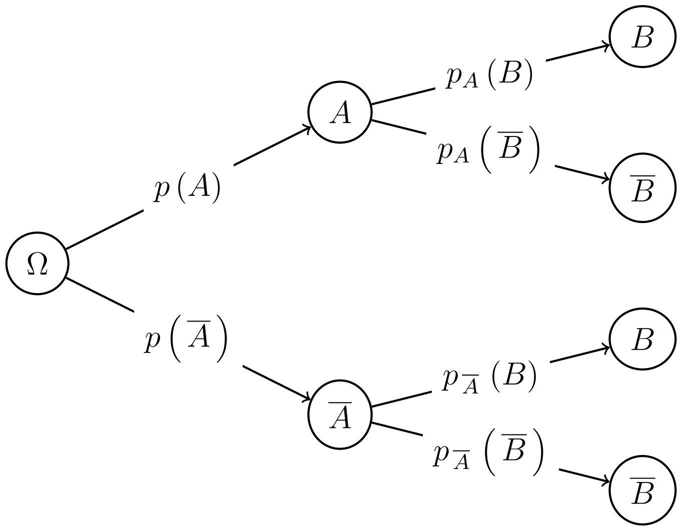
Remarque

On peut aussi définir la probabilité de A sachant B, sous réserve que $p(B)$ soit non nulle. On en déduit alors :

$$p(A \cap B) = p(B) \times p_B(A)$$

3.2.1 Probabilité conditionnelle et arbre pondéré

Il est pratique pour le calcul des probabilités de représenter deux événements A et B d'une expérience aléatoire à l'aide d'un *arbre pondéré par les probabilités* : la branche entre deux événements porte la probabilité de réaliser un événement à partir de l'événement précédent.



Règles de calcul des probabilités à partir de l'arbre pondéré :

- la somme des probabilités de toutes les branches issues du même nœud est 1 ;
- la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités des branches qui composent ce chemin ;
- la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui conduisent à cet événement.

3.3 Probabilités totales

Propriété 4 – ***probabilités totales***

On considère n événements A_1, A_2, ..., A_n, tous de probabilité non nulle, incompatibles deux à deux, et dont l'union est Ω.

Pour n'importe quel événement $B \subset \Omega$, on a :

$$p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + \cdots + p(A_n \cap B)$$

L'égalité ci-dessus s'écrit aussi :

$$p(B) = p(A_1) \times p_{A_1}(B) + p(A_2) \times p_{A_2}(B) + \cdots + p(A_n) \times p_{A_n}(B)$$

4 Fonctions exponentielles

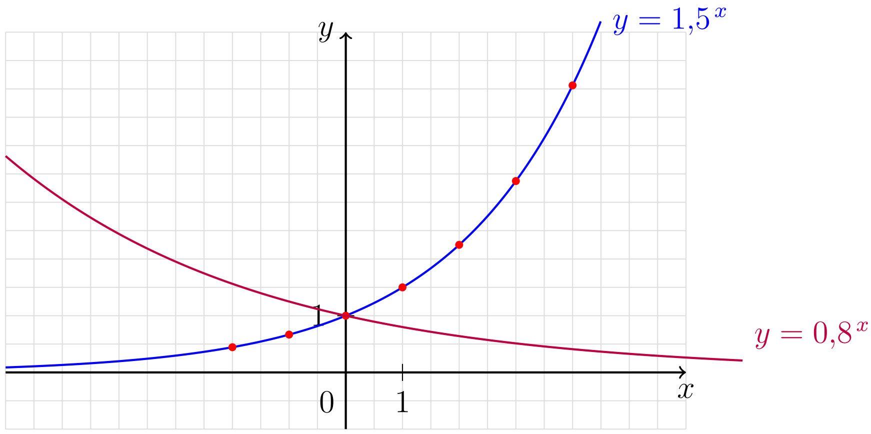
4.1 Les fonctions exponentielles

Définition 1 – *fonction exponentielle de base a*

Le nombre a désigne un nombre réel *strictement positif*.

La fonction $x \longmapsto a^x$ est définie sur $\mathbb{R}$. Lorsque x est un entier relatif, la valeur de l'image a^x coïncide avec la valeur usuelle de a^x (on dit que cette fonction prolonge la fonction puissance usuelle sur $\mathbb{R}$).

Par exemple, pour $x = 5$, on a : $a^5 = a \times a \times a \times a \times a$.



Propriété 1

Le nombre a est un nombre réel strictement positif.

La fonction $x \longmapsto a^x$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Propriété 2

Le nombre a est un nombre réel strictement positif :

$$a^0 = 1$$

Propriété 3

Le nombre a est un nombre réel strictement positif. Pour tout nombre réel x :

$$a^x > 0$$

Propriété 4

Le nombre a est un nombre réel strictement positif :

- dans le cas où $0 < a < 1$, la fonction $x \longmapsto a^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$;
- dans le cas où $a > 1$, la fonction $x \longmapsto a^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Propriété 5 – *propriété fondamentale (relation fonctionnelle)*

Le nombre a est un nombre réel strictement positif ; x et y sont deux réels quelconques :

$$a^x \times a^y = a^{x+y}$$

On en déduit que les propriétés usuelles des puissances se prolongent aux fonctions exponentielles :

Propriété 6

Les nombres a et b sont deux nombres réels strictement positifs.

Les nombres x, x_1 et x_2 sont des réels quelconques.

$a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$	$\dfrac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1 - x_2}$	$\left(a^{x_1}\right)^{x_2} = a^{x_1 \times x_2}$	$a^x \times b^x = (a \times b)^x$

4.2 La fonction exponentielle

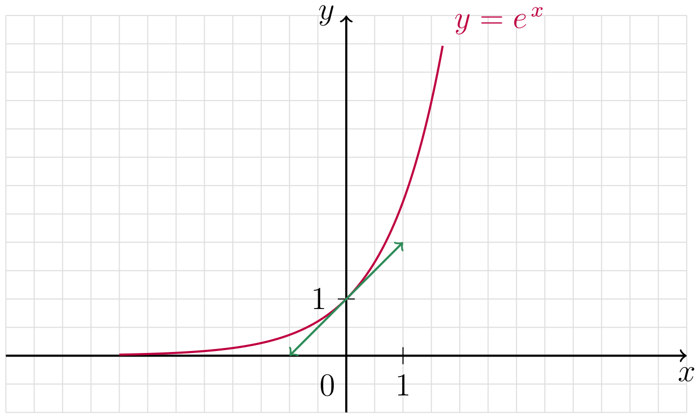
Parmi toutes les fonctions exponentielles de base a (où a est un nombre réel strictement positif), une seule fonction possède en 0 un nombre dérivé égal à 1 : cette fonction est appelée *LA fonction exponentielle*.

Définition 2 – *(la) fonction exponentielle*

La fonction exponentielle est la seule fonction exponentielle dont le nombre dérivé en 0 est égal à 1.

Pour cette fonction particulière $x \longmapsto a^x$, il existe donc une valeur particulière de a, elle aussi unique : elle est notée e.

Par conséquent, l'image de n'importe quel réel x est notée e^x.



Propriété 7

La fonction $x \longmapsto e^x$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

De plus, la fonction dérivée de la fonction $x \longmapsto e^x$ est la fonction $x \longmapsto e^x$ elle-même.

Propriété 8

La fonction $x \longmapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Propriété 9

La fonction $x \longmapsto e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

4.3 Autres propriétés de la fonction exponentielle

4.3.1 Fonction exponentielle et opérations

La fonction exponentielle est une fonction puissance particulière ; pour cette raison, les propriétés vraies pour les fonctions puissance sont encore vraies pour la fonction exponentielle.

Propriété 10

Les nombres x, x_1 et x_2 sont des réels quelconques :

$e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$	$e^{x_1} \times e^{x_2} = e^{(x_1+x_2)}$	$\dfrac{e^{x_1}}{e^{x_2}} = e^{(x_1-x_2)}$	$\left(e^{x_1}\right)^{x_2} = e^{(x_1 \times x_2)}$

4.3.2 Fonctions du type e^u

Propriété 11

u désigne une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

La fonction $f : x \longmapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I, et pour tout nombre réel x de I, on a :

$$f'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$$

On déduit de la propriété précédente que les fonctions u et f ont le même sens de variation sur I.

4.3.3 Équations et inéquations

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On en déduit :

Propriété 12

a et b sont deux réels quelconques.

L'inéquation $e^a < e^b$ équivaut à $a < b$.

Propriété 13

a et b sont deux réels quelconques.

L'équation $e^a = e^b$ équivaut à $a = b$.

5 Fonction « logarithme népérien »

5.1 Logarithme népérien d'un nombre réel str. positif

5.1.1 Définition

Propriété 1

Pour n'importe quel nombre réel a strictement positif, l'équation $e^x = a$ possède une solution unique.

Définition 1 – ***logarithme népérien de*** a***, avec*** $a \in \mathbb{R}^{\star+}$

La solution de l'équation $e^x = a$ est appelée *logarithme népérien de* a et elle est notée :

$$x = \ln a\,.$$

On en déduit deux propriétés importantes :

1. L'égalité :
$$e^{\ln a} = a\,.$$
2. $e^x = a$ donc $\ln\left(e^x\right) = \ln\left(a\right) = x$. C'est-à-dire :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ln\left(e^x\right) = x\,.$$

   En particulier, on déduit que : $\ln e = \ln\left(e^1\right) = 1$.

5.1.2 Propriétés

Propriété 2 – ***propriété fonctionnelle de*** $\ln$

a et b sont deux nombres strictement positifs. On a :

$$\ln\left(a\right) + \ln\left(b\right) = \ln\left(a \times b\right)\,.$$

Cette propriété permet de démontrer les suivantes :

Propriété 3

a et b sont deux nombres réels strictement positifs, p est un nombre entier relatif.

- Pour $a > 0$:
$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln\left(a\right)\,.$$
- Pour $a > 0$ et $b > 0$:
$$\ln\left(a\right) - \ln\left(b\right) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)\,.$$

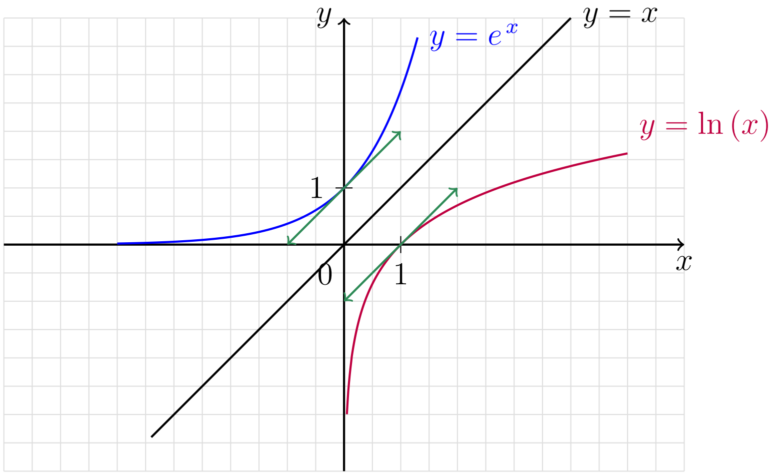
— Pour $a > 0$ et p un nombre entier relatif :

$$\ln\left(a^p\right) = p \times \ln(a) .$$

— Pour $a > 0$:

$$\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a) .$$

5.2 Étude de la fonction logarithme



5.2.1 Fonction dérivée de $\ln$

On admet que la fonction logarithme népérien, définie sur $\mathbb{R}^{\star +}$:

$$\begin{array}{rccl} \ln : & \mathbb{R}^{\star +} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \ln(x) \end{array}$$

est *dérivable sur* $\mathbb{R}^{\star +}$. De plus :

Propriété 4 – ***fonction dérivée de*** $\ln$

Pour n'importe quel nombre x strictement positif, on a :

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} .$$

5.2.2 Variations

L'étude du signe de la dérivée de $\ln$, strictement positive sur $\mathbb{R}^{\star +}$, permet de conclure :

Propriété 5

La fonction *logarithme népérien est strictement croissante sur* $\mathbb{R}^{\star +}$.

En particulier :

- Pour $0 \leqslant a \leqslant 1$, on a : $\ln a \leqslant 0$.
- Pour $a \geqslant 1$, on a : $\ln a \geqslant 0$.
- On rappelle que : $e^0 = 1$ implique $\ln 1 = 0$.

5.2.3 Convexité

Propriété 6

La fonction logarithme népérien est concave sur $\mathbb{R}^{\star+}$.

5.2.4 Primitives de la fonction inverse

Propriété 7

La fonction logarithme népérien est l'unique primitive sur $\mathbb{R}^{\star+}$ de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ qui s'annule pour $x = 1$.

Autrement dit :

- Pour $a > 0$ et $b > 0$:
$$\int_a^b \frac{1}{t}\,dt = \ln(b) - \ln(a)$$
- Pour $x > 0$:
$$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \ln(x)$$
  et donc :
$$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = 0 \iff x = 1$$

6 Intégration

6.1 Primitives d'une fonction

Définition 1 – *Primitive d'une fonction continue*

f est une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

On dit qu'une fonction g est une *(fonction) primitive* de f sur I lorsque g est dérivable sur I, avec :

$$\forall x \in I, g'(x) = f(x)$$

Remarques

1. Par convention, on note par la lettre majuscule correspondante le nom d'une primitive : par exemple, une primitive d'une fonction h sera notée H.
2. Pour une même fonction, il existe une infinité de fonctions primitives.
3. D'après la définition, on a donc, si F est une primitive de f :

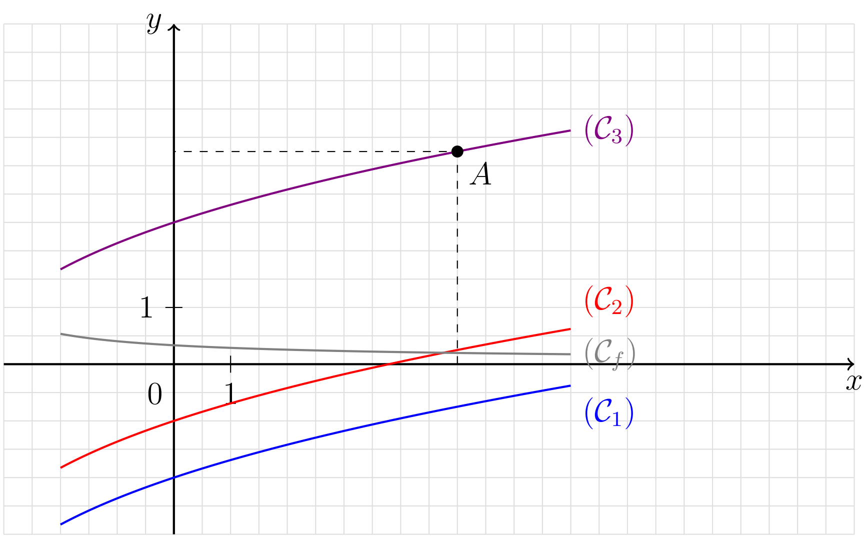
$$\forall x \in I, F'(x) = f(x)$$

Propriété 1

f est une fonction continue sur un intervalle I.

Deux fonctions F_1 et F_2 définies et dérivables sur I sont deux primitives de f sur I si, et seulement si, il existe un nombre réel k tel que :

$$\forall x \in I, F_1(x) - F_2(x) = k$$



Propriété 2

f est une fonction continue sur un intervalle I et : $x_0 \in I$, $a \in \mathbb{R}$.

Il existe une seule primitive F de f sur I pour laquelle : $F(x_0) = a$.

6.2 Intégrale d'une fonction

Définition 2 – ***Intégrale d'une fonction***

f est une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$; a et b sont deux réels de I.

Le nombre noté $\int_a^b f(t)\,dt$ est appelé *intégrale de la fonction f entre a et b*.

Ce nombre est défini par :

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

où la fonction F désigne n'importe quelle primitive de f sur I.

Notation

On rencontre aussi la notation (qui conserve le même sens) :

$$\int_a^b f(t)\,dt = [F(x)]_a^b$$

Propriété 3

f est une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$; a et b sont deux réels de I.

Si $a \leqslant b$ et si *f est positive entre a et b*. Alors :

$$\int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0$$

Propriété 4 – ***Relation de CHASLES***

f est une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Pour n'importe quels réels a, b et c de I, on a :

$$\int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt.$$

On en déduit par exemple :

Propriété 5

f est une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

$$\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt.$$

(par conséquent, la valeur d'une intégrale peut être un nombre réel négatif.)

Propriété 6 – *linéarité*

f et g sont deux fonctions définies et continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

$$\int_a^b \big(f(t)+g(t)\big)dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt.$$

De plus, pour tout réel λ, on a :

$$\int_a^b \lambda \times f(t)\,dt = \lambda \times \int_a^b f(t)\,dt.$$

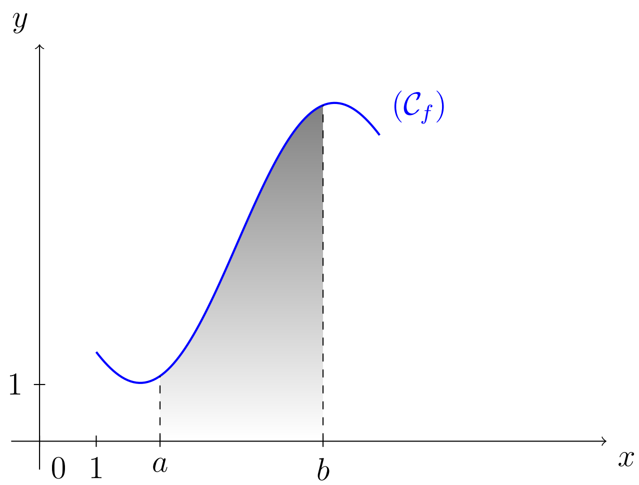
6.3 Intégrale et aire

Propriété 7 – *intégrale et aire*

f est une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$; a et b sont deux réels de I.

Le nombre $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est égal à l'aire de la région située entre :

- la représentation graphique de f sur I ;
- l'axe des abscisses ($y=0$) ;
- la droite d'équation $x=a$;
- la droite d'équation $x=b$.



6.3.1 Comparaison

Propriété 8 – ***comparaison***

f et g sont deux fonctions définies et continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. a et b sont deux réels de I.

Si, de plus, on a :

$$\forall x \in [a;b]\,,\, f(x) \leqslant g(x)\,,$$

Alors :

$$\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b g(t)\,dt.$$

6.3.2 Fonction définie par une intégrale

Propriété 9

f est une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. a est un réel de I. On pose :

$$\forall x \in I,\, g(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Alors :

1. g est définie et dérivable sur I (sauf en ses bornes), avec :

$$\forall x \in I,\, g'(x) = f(x)\,,$$

2. $g(a) = 0\,.$

6.3.3 Valeur moyenne

Définition 3 – ***Valeur moyenne d'une fonction***

f est une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$; a et b sont deux réels de I.

On appelle *valeur moyenne de la fonction f* sur l'intervalle $[a;b]$ le nombre m défini par :

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\,.$$

7 Lois de probabilité

7.1 Lois de probabilité à densité

On s'intéresse ici aux *variables aléatoires à lois continues*, qui prennent pour valeurs des nombres quelconques dans un intervalle de $\mathbb{R}$ (par opposition aux variables aléatoires *discrètes*, qui ne prennent qu'un nombre fini de valeurs réelles, isolées).

Lorsqu'une variable aléatoire prend toutes les valeurs d'un intervalle, on ne peut plus définir sa loi de probabilité par une liste de probabilités. Pour décrire les probabilités associées à cette variable aléatoire, on utilise une fonction de densité.

Définition 1 – ***fonction de densité***

a et b sont deux nombres réels, avec $a < b$.
f est une fonction définie, continue et positive sur l'intervalle $[\,a\,;\,b\,]$.

On dit que la fonction f est une *fonction de densité sur* $[\,a\,;\,b\,]$ si :

$$\int_a^b f(t)\,dt = 1\,.$$

Vocabulaire : on dit aussi que f est une *densité de probabilité* sur $[\,a\,;\,b\,]$.

Définition 2 – ***loi de probabilité à densité***

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\,a\,;\,b\,]$.

On définit la *loi de probabilité sur* $[\,a\,;\,b\,]$ *de densité* f en associant à tout intervalle $[\,c\,;\,d\,]$ de $[\,a\,;\,b\,]$ la probabilité que X prenne une valeur dans $[\,c\,;\,d\,]$ par :

$$P(X \in [\,c\,;\,d\,]) = P(c \leqslant X \leqslant d) = \int_c^d f(t)\,dt\,.$$

Propriété 1

1. Pour n'importe quel nombre c de $[\,a\,;\,b\,]$, on a : $P(\{\,c\,\}) = P(X = c) = 0$.
2. Pour n'importe quel nombre c de $[\,a\,;\,b\,]$, on a : $P(X \in [\,c\,;\,b\,]) = 1 - P(X \in [\,a\,;\,c\,])$.

7.2 Loi uniforme sur un intervalle $[\,a\,;\,b\,]$

Définition 3 – *variable suivant la loi uniforme*

On dit qu'une *variable aléatoire X suit la loi uniforme* sur un intervalle $[\,a\,;\,b\,]$ lorsque la densité de probabilité de X est une *fonction constante* sur $[\,a\,;\,b\,]$.

On en déduit la fonction de densité pour X :

Propriété 2

Si X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur un intervalle $[\,a\,;\,b\,]$, alors la fonction de densité f (de la variable X) est définie pour tout $x \in [\,a\,;\,b\,]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

Propriété 3

Pour tout intervalle $[\,c\,;\,d\,]$ de $[\,a\,;\,b\,]$, on a :

$$P(X \in [\,c\,;\,d\,]) = \int_c^d \frac{1}{b-a} dt = \frac{d-c}{b-a}.$$

Propriété 4

L'espérance de la loi uniforme sur $[\,a\,;\,b\,]$ est égale à $\dfrac{a+b}{2}$.

(autrement dit, l'espérance de X est le milieu du segment $[\,a\,;\,b\,]$)

(Autrement dit, l'espérance de X est le milieu du segment $[\,a\,;\,b\,]$.)

Remarque :

Pour une variable aléatoire continue X, l'espérance de X est calculée par :

$$\mathrm{E}(X) = \int_a^b t\, f(t)\, dt$$

On en déduit la propriété précédente.

7.3 Loi normale centrée réduite

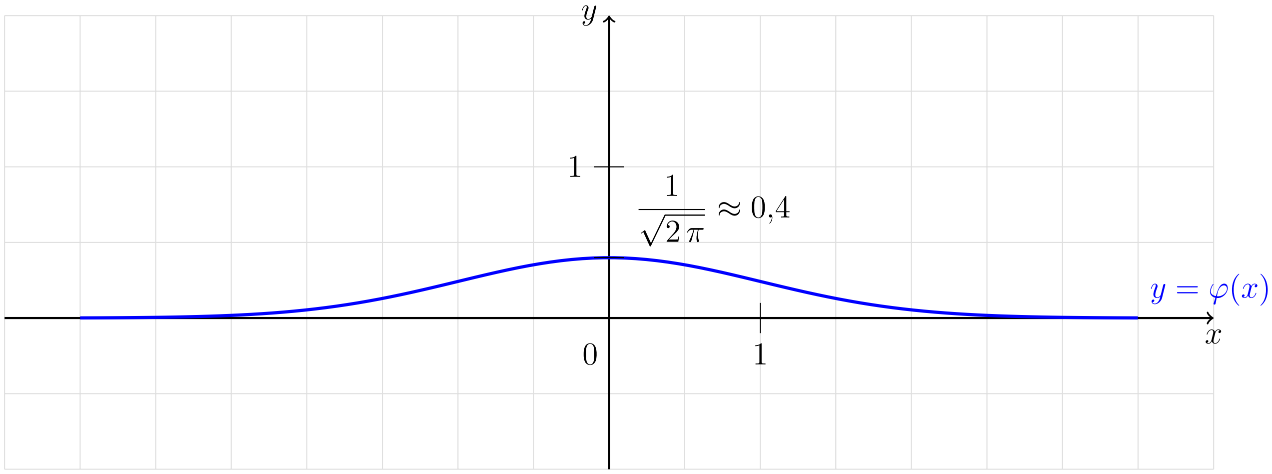
Pour une présentation, on pourra consulter sur la Toile :

http://images.math.cnrs.fr/La-courbe-en-cloche.html

Définition 4 – *loi normale $\mathcal{N}(\,0\,;\,1\,)$ (ou « loi normale centrée réduite »)*

On appelle *loi normale centrée et réduite* et on note $\mathcal{N}(\,0\,;\,1\,)$ la loi de probabilité qui possède pour densité la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}\,.$$



Propriété 5

1. La représentation graphique de la fonction φ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
2. L'aire du domaine sous la courbe, sur $\mathbb{R}$, est égale à 1.

Remarque :

On ne sait pas calculer de primitive de la fonction φ. Par conséquent, on calcule des valeurs approchées des probabilités à l'aide de calculatrices ou de logiciels :

Propriété 6 – *Intervalles particuliers (remarquables)*

X est une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(\,0\,;\,1\,)$:

1. $P(X \in [\,-1\,;\,1\,]) \approx 0{,}68\,.$
2. $P(X \in [\,-1{,}96\,;\,1{,}96\,]) \approx 0{,}95\,.$
3. $P(X \in [\,-2\,;\,2\,]) \approx 0{,}954\,.$
4. $P(X \in [\,-3\,;\,-3\,]) \approx 0{,}997\,.$

7.4 Lois normales $\mathcal{N}(\,\mu\,;\,\sigma^2\,)$

Définition 5 – ***loi normale*** $\mathcal{N}(\,\mu\,;\,\sigma^2\,)$

On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(\,\mu\,;\,\sigma^2\,)$ lorsque la variable aléatoire $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(\,0\,;\,1\,)$.

Remarques :

1. Le nombre μ est l'espérance de la variable aléatoire X.
   La valeur de μ est la limite de la valeur moyenne observée des réalisations de X pour des échantillons devenant infiniment grands.
   La droite d'équation $x = \mu$ est l'axe de symétrie de la fonction de densité de X.
2. Le nombre σ est l'écart-type de la variable aléatoire X.

Propriété 7 – ***Intervalles particuliers (remarquables)***

X est une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(\,\mu\,;\,\sigma^2\,)$:

1. $P(X \in [\,\mu - \sigma\,;\,\mu + \sigma\,]) \approx 0{,}68\,.$
2. $P(X \in [\,\mu - 2\,\sigma\,;\,\mu + 2\,\sigma\,]) \approx 0{,}954\,.$
3. $P(X \in [\,\mu - 3\,\sigma\,;\,\mu + 3\,\sigma\,]) \approx 0{,}997\,.$