Mathématiques

Pascal CHAUVIN

T$^{\text{le}}$ ES Spé

13 février 2018

Table des matières

1 Matrices (1)

1.1 Définition

Définition 1 – *Matrice*

Une *matrice* est un tableau rectangulaire de nombres, appelés *coefficients* de la matrice.

Lorsqu'une matrice comporte n lignes et p colonnes, on dit que la matrice est de *taille* $n \times p$ (ou *dimension* $n \times p$).

Exemple 1 ▷ La matrice A est une matrice de taille 3×4 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 3 & 3 \\ 7 & 2 & -5 & 0{,}2 \\ 0 & -10 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple 2 ▷ La matrice L_3 :

$$L_3 = \begin{pmatrix} 0 & -10 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

est une *matrice ligne* de taille 1×4 correspondant à la troisième ligne de A.

Exemple 3 ▷ La matrice C_2 :

$$C_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix}$$

est une *matrice colonne* de taille 3×1 correspondant à la seconde colonne de A.

Exemple 4 ▷ On numérote les coefficients de la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \end{pmatrix}$$

Le coefficient $a_{i,j}$ est donc le nombre à l'intersection de la ligne i et de la colonne j, le coefficient $a_{1,1}$ étant le nombre « en haut, à gauche ».

Exemple 5 ▷ La matrice T suivante est une *matrice nulle* :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple 6 ▷ La matrice carrée U suivante est une *matrice unité* de taille 4, car tous les coefficients de la diagonale principale sont égaux à 1 :

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Définition 2 – *Matrice ligne, matrice colonne*

1. Une *matrice ligne* est une matrice de taille $1 \times n$.
   On dit aussi « vecteur ligne ».
2. Une *matrice colonne* est une matrice de taille $n \times 1$.
   On dit aussi « vecteur colonne ».

Définition 3 – *Matrice carrée*

Une *matrice carrée de taille* n est une matrice ayant n lignes et n colonnes.

Définition 4 – *Matrices égales*

On dit que deux matrices A et B sont égales si elles ont la même taille et si chaque coefficient de A est égal au coefficient correspondant de B.

1.2 Addition

Définition 5 – *Somme de deux matrices*

La *matrice somme* de deux matrices A et B de même format est la matrice obtenue en ajoutant à chaque élément de A le coefficient correspondant de B.

Propriété 1 – *Propriétés de la somme*

1. A est une matrice et O est la matrice nulle de même taille que A :
$$A + O = O + A = A.$$
2. Si B est une matrice de même taille que A :
$$A + B = B + A.$$
3. A, B et C sont trois matrices de même taille :
$$(A + B) + C = A + (B + C).$$
   On note donc sans parenthèses :
$$A + B + C = (A + B) + C.$$

ATTENTION !

On ne peut additionner deux matrices que si elles possèdent le même format !

1.2.1 Matrice opposée. Différence de matrices

Définition 6 – ***Matrice opposée***

La *matrice opposée* d'une matrice A est la matrice pour laquelle chaque coefficient est l'opposé du coefficient correspondant de la matrice A.

La *matrice opposée* de A est notée $-A$.

Définition 7 – ***Différence de deux matrices***

La *matrice différence* de deux matrices A et B de même format est la matrice égale à la somme de la matrice A et de la matrice opposée de B :

$$A - B = A + (-B)$$

1.3 Produit d'une matrice par un nombre réel

Définition 8 – ***Produit d'une matrice par un nombre réel***

λ est un nombre réel et A est une matrice.

La *matrice notée λA* est la matrice dans laquelle chaque coefficient est le produit du coefficient correspondant de A par le nombre λ :

$$\lambda \times \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,p} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots & a_{3,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \times a_{1,1} & \lambda \times a_{1,2} & \lambda \times a_{1,3} & \dots & \lambda \times a_{1,p} \\ \lambda \times a_{2,1} & \lambda \times a_{2,2} & \lambda \times a_{2,3} & \dots & \lambda \times a_{2,p} \\ \lambda \times a_{3,1} & \lambda \times a_{3,2} & \lambda \times a_{3,3} & \dots & \lambda \times a_{3,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda \times a_{n,1} & \lambda \times a_{n,2} & \lambda \times a_{n,3} & \dots & \lambda \times a_{n,p} \end{pmatrix}$$

1.4 Produit de matrices

1.4.1 Produit d'une matrice par une matrice colonne

Définition 9 – ***Produit d'une matrice par une matrice colonne***

A est une matrice de format $n \times p$ et B est une matrice colonne de format $p \times 1$.

La *matrice produit $A \times B$* est la matrice de format $n \times 1$ définie par :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,p} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots & a_{3,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{1,1} \\ b_{2,1} \\ b_{3,1} \\ \dots \\ b_{p,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} \times b_{1,1} + a_{1,2} \times b_{2,1} + \dots + a_{1,p} \times b_{p,1} \\ a_{2,1} \times b_{1,1} + a_{2,2} \times b_{2,1} + \dots + a_{2,p} \times b_{p,1} \\ a_{3,1} \times b_{1,1} + a_{3,2} \times b_{2,1} + \dots + a_{3,p} \times b_{p,1} \\ \dots \\ a_{n,1} \times b_{1,1} + a_{n,2} \times b_{2,1} + \dots + a_{n,p} \times b_{p,1} \end{pmatrix}$$

1.4.2 Produit de deux matrices

On peut définir le produit d'une matrice A de format $n \times p$ par une matrice B de format $p \times k$ à partir de la définition du produit d'une matrice par une matrice colonne :

Définition 10 – ***Produit de deux matrices***

Soient A une matrice de format $n \times p$ et B est une matrice de format $p \times k$.

On note L_i la matrice ligne égale à la i-ième ligne de A.

On note C_j la matrice colonne égale à la j-ième colonne de B.

On note P la *matrice produit de A et de B*, notée $A \times B$ (ou AB), la matrice dans laquelle chaque coefficient $p_{i,j}$ est égal au produit de la matrice L_i par la matrice C_j.

ATTENTION !

Le produit de deux matrices N'EST PAS commutatif ! En effet :

1. Le produit $A \times B$ peut exister alors que $B \times A$ n'existe pas ;
2. Même lorsque $B \times A$ existe, on a en général : $B \times A \neq A \times B$.

Propriété 2 – ***Propriétés du produit***

A, B et C sont trois matrices carrées d'ordre n, k est un nombre réel.

1. $(AB)\,C = A\,(BC)$ (associativité).
2. $(kA)\,B = A\,(kB) = k\,(AB)$.
3. $A\,(B + C) = AB + AC$ (distributivité à gauche).
4. $(A + B)\,C = AC + BC$ (distributivité à droite).
5. Si $A = B$, alors : $AC = BC$.
6. Si $A = B$, alors : $CA = CB$.

Définition 11 – ***Puissances d'une matrice carrée***

Soit A une matrice carrée d'ordre n :

1. On définit le carré de A par : $A^2 = A \times A$;
2. Pour un nombre entier naturel k, avec $k \geqslant 2$, on définit A^k :

$$A^k = \underbrace{A \times A \times A \times \cdots \times A}_{k \text{ matrices toutes égales à } A}$$

(*c.-à-d.* le produit de k matrices toutes égales à A).

2 Matrices (2)

2.1 Matrice inversible

On rappelle que I_n (appelée *matrice identité d'ordre n*) désigne la matrice carrée d'ordre n :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

(tous les coefficients sont nuls, sauf ceux de la première diagonale, tous égaux à 1.)

Si A est une matrice carrée de taille n, on a :

$$A \times I_n = I_n \times A = A\,.$$

Définition 1 – *Matrice inversible*

On dit qu'une matrice carrée A de taille n est *inversible* lorsqu'il existe une matrice B de taille n telle que :

$$A \times B = B \times A = I_n\,.$$

où I_n est la matrice carrée de taille n.

Dans ce cas, on dit que B est la *matrice inverse* de A et on note :

$$B = A^{-1}.$$

Exemple 1 ▷ On donne :

$$E = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

et :

$$F = \begin{pmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

Calculer les produits $E \times F$ et $F \times E$. Conclure.

Exemple 2 ▷ On donne :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} \end{pmatrix}$$

et :

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que A est une matrice inversible et donner sa matrice inverse.

Propriété 1

a, b, c et d sont quatre réels.

La matrice carrée $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si, et seulement si, $ad - bc$ est non nul.

2.2 Une application : la résolution des systèmes linéaires

On appelle système linéaire de n équations à p inconnues un système d'équations de la forme :

$$(S) = \begin{cases} a_{1,1} \times x_1 + a_{1,2} \times x_2 + \cdots + a_{1,p} \times x_p = b_1 \\ a_{2,1} \times x_1 + a_{2,2} \times x_2 + \cdots + a_{2,p} \times x_p = b_2 \\ \dots \\ a_{n,1} \times x_1 + a_{n,2} \times x_2 + \cdots + a_{n,p} \times x_p = b_n \end{cases}$$

On peut réécrire le système (S) sous la forme d'un produit de matrices $A \times X = B$, où A est la matrice de format $n \times p$ (de coefficients $a_{i,j}$) et X, B sont les deux matrices colonnes :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_p \end{pmatrix}$$

et :

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Définition 2 – ***Écriture matricielle d'un système***

L'écriture $A \times X = B$ est appelée *écriture matricielle* du système (S).

On parle parfois de *système matriciel*.

Propriété 2

On considère un système matriciel $A\,X = B$, où A est une matrice carrée d'ordre n, et X et B sont deux matrices colonnes à n lignes.

Si la matrice A est inversible, alors le système possède une solution unique, égale à :

$$X = A^{-1} \times B.$$

Exemple 1 ▷ Résoudre le système :

$$(S) = \begin{cases} 3\,x + 2\,y = -4 \\ 4\,x + y = 3 \end{cases}$$

3 Graphes (1)

3.1 Graphes non orientés

Définition 1 – ***Graphe, sommets, arêtes***

Un *graphe* est composé de points appelés *sommets* et de segments, appelés *arêtes* ; une arête relie deux sommets.

Définition 2 – ***Ordre d'un graphe***

L'*ordre* d'un graphe est le nombre de ses sommets.

Définition 3 – ***Sommets adjacents, degré d'un sommet***

Deux sommets reliés par une arête sont appelés *sommets adjacents*.
Le *degré d'un sommet* est le nombre des arêtes issues de ce sommet.

Propriété 1 – ***Lemme des poignées de mains***

La somme des degrés des sommets d'un graphe est égale au double du nombre d'arêtes.

Définition 4 – ***Graphe complet***

Un graphe est un *graphe complet* si chaque sommet est adjacent à tous les autres sommets du graphe.

Définition 5 – ***Chaîne, longueur d'une chaîne***

Une *chaîne* est une liste ordonnée de sommets, deux sommets consécutifs étant reliés par une arête.
La *longueur d'une chaîne* est le nombre d'arêtes parcourues dans cette chaîne.

Définition 6 – ***Cycle***

Une chaîne est un *cycle* lorsque l'origine et l'extrémité sont confondues et lorsque toutes les arêtes sont distinctes.

Remarque : une chaîne peut contenir plusieurs fois le même sommet.

Définition 7 – ***Graphe connexe***

Un graphe est dit *connexe* lorsqu'il existe au moins une chaîne entre deux sommets quelconques de ce graphe.

Définition 8 – ***Distance entre deux sommets d'un graphe connexe***

La *distance entre deux sommets* d'un graphe connexe est la longueur de la chaîne la plus courte reliant ces deux sommets.

Définition 9 – ***Diamètre d'un graphe connexe***

Le *diamètre d'un graphe connexe* est la plus grande distance entre deux sommets.

3.1.1 Sous-graphes

Définition 10 – ***Sous-graphe***

Un *sous-graphe* d'un graphe G est un graphe constitué de quelques sommets de G et de toutes les arêtes les reliant dans G.

Définition 11 – ***Graphe stable, sous-graphe stable***

Un graphe sans arête est appelé *graphe stable*.

Un sous-graphe sans arête est appelé *sous-graphe stable*.

3.2 Graphes orientés

Définition 12 – ***Graphe orienté***

Un *graphe orienté* est un graphe dans lequel chaque arête comporte un sens (d'un sommet vers un autre) ; on distingue alors *origine* et *extrémité* pour chaque arête.

Dans un graphe orienté, on préfère le mot *arc* à celui d'arête.

3.3 Chaînes eulériennes et cycles eulériens

Définition 13 – ***Chaîne eulérienne***

Une *chaîne eulérienne* est une chaîne contenant toutes les arêtes du graphe exactement une fois.

Définition 14 – ***Cycle eulérien***

Un *cycle eulérien* est une chaîne eulérienne fermée.

Propriété 2 – ***Théorème d'Euler***

On considère un graphe connexe G.

1. Le graphe G possède une chaîne eulérienne si, et seulement si, G possède exactement zéro ou deux sommets de degrés impairs.

2. Le graphe G possède un cycle eulérien si, et seulement si, chaque sommet de G possède un degré pair.

3.4 Matrice d'adjacence d'un graphe

Définition 15 – ***Matrice d'adjacence d'un graphe***

On considère un graphe dont tous les sommets sont identifiés par un nombre entier de 1 à n.

On appelle *matrice d'adjacence* du graphe la matrice carrée A d'ordre n dans laquelle le coefficient $a_{i,j}$ est le nombre d'arêtes ayant pour origine le sommet i et pour extrémité le sommet j du graphe.

Propriété 3

Pour un graphe simple, les coefficients de la matrice d'adjacence sont égaux à 0 ou à 1.

Propriété 4

La matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est symétrique (par à rapport à sa diagonale principale).

Propriété 5 – ***Théorème***

On note M la matrice d'adjacence d'un graphe G.

p est un entier naturel non nul.

Le coefficient de la matrice M^p à l'intersection de la ligne i et de la colonne j est égal au nombre de chaînes de longueur p partant du sommet i et allant au sommet j.